Irraggiamento e adduzione

G. F. G.

19 agosto 2018

Irraggiamento

Ogni corpo avente una temperatura superiore allo *zero assoluto* ($0°K$) emette energia sotto forma di radiazioni elettromagnetiche. Di queste radiazioni, quelle aventi lunghezza d'onda tra 0.1 μm e 1000 μm costituiscono la **radiazione termica**, cioè quella radiazione emessa a causa dei moti rotatori e vibratori delle molecole, degli atomi e degli elettroni. Poichè la temperatura, dal punto di vista microscopico, è una grandezza che ci permette di capire l'intensità di questi processi, all'aumentare della temperatura aumenta l'emissione della radiazione termica. Quando si parla di *trasmissione di calore per irraggiamento* si fa quindi riferimento a una parte dello scambio energetico tramite radiazione tra copri posti a distanza: l'energia raggiante emessa da un corpo, interagendo con altri corpi, si trasforma in misura piò o meno grande in calore e in altre forme di energia. Avendo capito che l'irragiamento è lagato alla propagazione delle onde elettromagnetiche, diamo alcune definizioni.

Lunghezza d'onda (λ)

Definiamo la lunghezza d'onda come il rapporto tra la velocità di propagazione dell'onda (c) e la frequenza della radiazione (ν):

$$\lambda = \frac{c}{\nu}. \tag{1}$$

La velocità di propagazione (c) è il rapporto tra la velocità della luce nel vuoto (c_0) e l'indice di rifrazione del mezzo (n):

$$c = \frac{c_0}{n}. \tag{2}$$

Irradiamento integrale (J)

Definiamo irradiamento integrale la quantità di energia raggiante che un corpo emette, in determinate condizioni, per unità di tempo e di superficie emettente. Può quindi essere definita anche come la potenza (W) emessa per unità di superficie del corpo (dS):

$$J = \frac{dW}{dS}. \tag{3}$$

L'irradiamento integrale, anche definito **emittanza globale**, ha una distribuzione spettrale che in genere è ripartita su tutto il campo delle lunghezze d'onda $(0, +\infty)$. La funzione distribuzione di J è detta **emissione specifica** (o **emittanza monocromatica**), è indicata con la lettera ϵ ed è definita dalla relazione:

$$\epsilon = \frac{dJ}{d\lambda}. \tag{4}$$

La formula giustificat il secondo appellativo dell'emissione specifica: **emittanza monocromatica**.
Dalle formile precedenti si ha che l'emittanza globale può essere espressa come:

$$J = \int_0^{+\infty} \epsilon \; d\lambda. \tag{5}$$

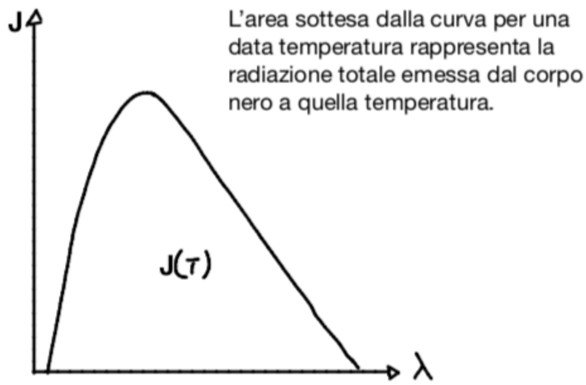

Figura 1: Diagramma $J - \lambda$

Interazione energia-corpo

Quando un fascio di radiazioni con potenza W incide su un corpo, si verificano feomeni di assorbimento, riflessione e trasparenza: una parte dell'energia posseduta dalla radiazione incidente viene assorbita (aW), una parte viene

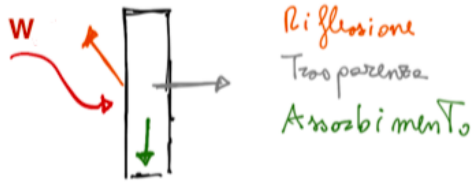

Figura 2: Radiazione incidente

riflessa (rW) e una parte trapassa il corpo (rW). Poichè lenergia si conserva si deve avere che:

$$W = aW + rW + tW \;\Rightarrow\; W = W(a + r + t) \;\Rightarrow$$

$$a + r + t = 1 \tag{6}$$

dove:

> a = coefficiente di assorbimento;
>
> r = coefficiente di riflessione;
>
> t = coefficiente di trasparenza.

Dalla (6) si deduce che ognuno dei coefficienti debba assumere un valore compreso tra 0 e 1.
I **corpi** aventi $t = 0$ vengono detti **opachi**; quelli con $t \neq 0$ vengono detti **trasparenti**.
Per quanto concerne la riflessione, essa può essere speculare, diffusa o una via di mezzo tra le due (figura 2). La **riflessione speculare** segue la legge di Cartesio: l'angolo di riflessione è uguale all'angolo di incidenza. Nel caso di riflessione diffusa, il punto di incidenza diventa una sorgente di emissione diffusa. La diffusione può avvenire secondo la legge di Lambert:

$$W_\theta = W_n cos(\theta) \tag{7}$$

dove

> θ = angolo formato tra la normale alla superficie del corpo e il raggio riflesso;
>
> W_θ = potenza riflessa in direzione θ;
>
> W_n = potenza riflessa in direzione normale alla superficie del corpo.

Un corpo per cui valga la (7) è detto **diffondente perfetto**. Dalla formula si vede che la potenza emessa è massima lungo la normale e nulla in direzione tangente alla superficie (figura).
In realtà, non esistono corpi che riflettono in modo perfettamente speculare o diffuso e quindi i due contributi sono presenti insieme.

Corpo nero

Definiamo corpo nero un particolare corpo opaco (i corpi opachi sono quelli per cui si ha $t = 0$) in grado di assorbire tutta l'energia raggiante incidente su esso, qualunque siano la lunghezza d'onda della radiazione e la temperatura del corpo. Per tale corpo si ha dunque $t = 0,\ r = 0$ e $a = 1$.
L'appellativo *nero* è utilizzato in analogia a ciò che succede con le radiazioni visibili e cioè che quando tutta l'energia raggiante viene assorbita da un corpo, quest'ultimo ci appare nero. Tale nomenclatura non deve però generare confusione. I corpi neri, infatti, emettono energia e quindi, se, ad esempio, avessimo dei visori a infrarossi un corpo nero ci apparirebbe di un colore dettato dalla sua temperatura.
Il corpo nero rappresenta, comunque, un modello ideale in quanto in natura non esiste un corpo che si comporti totalmente come un corpo nero: a parità di temperatura e lunghezza d'onda, è il corpo che emette più di ogni altro corpo ed è anche l'unico in grado di assorbire tutta la radiazione incidente.
Un buon dispositivo pratico che permette di ottenere prestazioni simili a quelle del corpo nero è l'*hohlraum*, (termine tedesco che significa *cavità*).
Tale dispositivo è ottenuto praticando un foro nella parete di un corpo cavo, opaco alle radiazioni e di dimensione tale che la sua superficie interna sia grande rispetto alla dimensione del foro. In un tale corpo, infatti, le radiazioni che entrano incidono sulla superficie interna e subiscono una serie di riflessioni in ognuna delle quali perdono una parte di energia. In tal modo, la potenza che può fuoriuscire dal foro è estremamente piccola.

Principio di Kirchhoff

I valori dei coefficienti di assorbimento (a) e di riflessione (ϵ) dipendono dalla lunghezza d'onda della radiazione (λ), dalla temperatura (T) e dalla natura del corpo (N), nonchè dalla sua superficie che influenzando la quantità di energia che viene rinviata dal corpo influenza il coefficiente di riflessione e il coefficiente di assorbimento.
Il principio di Kirchhoff afferma che il rapporto $\frac{\epsilon}{a}$ assume lo stesso valore per tutti i corpi se viene calcolato per gli stessi valori di temperatura e lunghezza d'onda. Matematicamente:

$$\epsilon = f'(\lambda, T, N) \qquad a = f''(\lambda, T, N) \qquad \frac{\epsilon}{a} = f'''(\lambda, T).$$

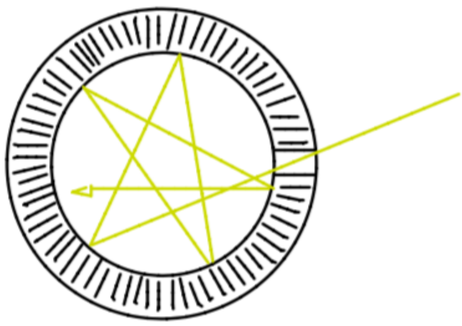

Figura 3: Hohlraum

Per il corpo nero si parla di emissione specifica ϵ_0 e grazie a questa possiamo definire il coefficiente di assorbimento di un generico corpo come:

$$a = \frac{\epsilon}{\epsilon_0}, \tag{8}$$

ossia come il rapporto tra la sua emissione specifica e quella del corpo nero.

Legge di Stefan-Boltzamann

La seguente legge, dedotta sperimentalmente da Stefan nel 1879 e spiegata utilizzando argomentazioni termodinamiche da Boltzmann nel 1884, asserisce che l'irradiamento integrale del corpo nero è proporzionale alla quarta potenza della sua temperatura assoluta:

$$J_0 = \int_0^{+\infty} \epsilon_0 d\lambda = \sigma_0 T^4 \tag{9}$$

dove

T = temperatura assoluta $[K]$;

$\sigma_0 = 5.67 \cdot 10^{-8}\ \frac{W}{m^2 \cdot K^4}$, costante di Stefan-Boltzmann.

Legge di Wien

La legge di Wien, o *di spostamento massimo*, afferma che la curva di emissione specifica del corpo nero presenta un massimo e che la lunghezza d'onda a cui tale massimo si verifica è inversamente proporzionale alla temperatura assoluta:

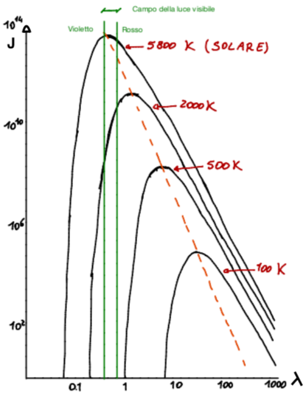

Figura 4: variazione del potere emissivo del corpo nero con la temperatura e la lunghezza d'onda

$$\lambda_{max} = \frac{A}{T} \tag{10}$$

dove

> $A = 2898$ se la lunghezza d'onda viene espressa in $[\mu m]$ e la temperatura in $[K]$.

Legge di Plank

La legge di Plank è un'espressione che rappresenta la forma della funzione $\epsilon_0 = \epsilon_0(\lambda, T)$, ossia la funzione che ci informa di come l'emissione specifica del corpo nero vari con la lunghezza d'onda e la temperatura.

$$\epsilon_0(\lambda, T) = \frac{C_1}{\lambda^5 (e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1)} \tag{11}$$

dove

> $C_1 = 3.74 \cdot 10^{-16}\ W m^2$;
>
> $C_2 = 0.0144\ mK$

Integrando la formula di Plank tra $\lambda = 0$ e $\lambda = +\infty$ si ottiene la legge di Stefan.
Per una data temperatura, derivando la legge di Plank rispetto a λ e valutandola nel valore che annulla la derivata si ottiene la legge di Wien.

Emissione dei corpi reali

Oltre ai corpi già considerati (i corpi opachi e i corpi neri) è utile considerare un'altra classe di corpi che è quella dei corpi grigi.

Corpi grigi

Definiamo corpi grigi per assorbimento quei corpi per i quali il coefficiente di assorbimento (a) è costante al variare di λ. Per ricavare la curva di emissione di tali corpi basta moltiplicare la funzione $\epsilon_0(\lambda, T)$ per il valore a.
Se in coefficiente di assorbimento varia con la lunghezza d'onda, il corpo si dice **selettivo**. In generale, non è è possibile esprimere la funzione $a(\lambda, T)$ per via analitica; essa è determinata sperimentalmente.

Partendo dalle leggi del corpo nero, per un corpo grigio si ha

$$J = \sigma T^4 \tag{12}$$

dove $\sigma = a_g \cdot \sigma_0$.

Per tracciare la curva di emissione di un corpo di cui si conosca $a = a(\lambda)$ possiamo utilizzare il principio di Kirchhoff: assegnata la temperatura si ha

$$\epsilon(\lambda) = a(\lambda)\epsilon_0(\lambda) \tag{13}$$

L'utilità di tale formula, a prima vista non evidente dal momento che per un corpo $a(\lambda)$ e $\epsilon(\lambda)$ sono a priori incogniti, è che $a(\lambda)$ si ricava facilmente in laboratorio e la formula permette dunque di ricavare $\epsilon(\lambda)$.

Corpi non neri

Le leggi che abbiamo scritto per i corpi neri possono essere utilizzate per studiare varie categorie di corpi a patto di utlizzare dei coefficienti correttivi. Il corpo nero diventa, allora, un riferimento rispetto al quale esprimere le caratteristiche emissive e assorbenti dei corpi reali. Per capire, ad esempio, quanto emette un corpo reale si calcola quanto emetterebbe tale corpo se fosse nero e poi si abbassa il valore ottenuto per mezzo di coefficienti correttivi (sappiamo, infatti, che il corpo nero è quello che emette di più e quindi il valore determinato è sicuramente più alto di quello reale). I coefficienti correttivi sono l'emissività spettrale e l'emissivita totale.

Emissività spettrale (η_λ)

L'emissività spettrale, o monocromatica, è definita come il rapporto tra l'emissione specifica del corpo e l'emissione specifica del corpo nero.

$$\eta_\lambda = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \tag{14}$$

Emissività totale (η_t)

L'emissività totale è il rapporto tra l'emittanzo globale del corpo considerato e quella del corpo nero.

$$\eta_t = \frac{J}{J_0} = \frac{J}{\sigma_0 T^4}. \tag{15}$$

Tali coefficienti danno informazioni sul comportamento del corpo considerato nei confronti ell'irraggiamento e dell'assorbimento di energia.
Facendo riferimento alle emissività, possiamo definire grigi quei corpi per cui l'emissività spettrale e totale assumono lo stesso valore, coincidente tra l'altro con il coefficiente di assorbimento.

Trasmissione del calore per irraggiamento

Diciamo che le condizioni necessarie affinchè due corpi possano scambiare calore per irraggiamento sono le seguenti:

- i due corpi devono avere temperature differenti;
- il mezzo all'interno del quale si trovano i due corpi deve avere un basso coefficiente di assorbimento, così da non incidere sull'energia raggiante scambiata.

Trasmissione tra corpi neri

Consideriamo due superfici di area A_1 e A_2, mantenute alle temperature uniformi T_1 e T_2, poste a distanza r. Lo scambio complessivo di energia che avviene tra le due superfici è dato dalla differenza tra l'energia che viene assorbita da A_2 (e che quindi è stata emessa da A_1) e l'energia che viene assorbita da A_1 (che quindi è stata emessa da A_2).
Se le due superfici si comportano come corpi neri vengono meno i rinvii di eneregia tra le superfici e, inoltre, l'emissione avviene secondo le leggi di Lambert, cioè con intensità normale data da

$$j_{ni} = \frac{1}{\pi} \cdot \sigma_0 \cdot T_i^4 \cdot dA_i. \tag{16}$$

Si può dimostrare che se le due superfici hanno temperature uniformi T_1 e T_2, il flusso termico scambiato può essere espresso da:

$$q_{12} = \sigma_0 \cdot A_1 \cdot F_{12} \cdot (T_1^4 - T_2^4) \tag{17}$$

dove il termine F_{12} dipende dalla configurazione geometrica del problema e viene detto **fattore di forma**. Facciamo una breve digressione su ques'ultimo termine.

Il fattore di forma, anche detto **fattore di vista**, **di configurazione** o

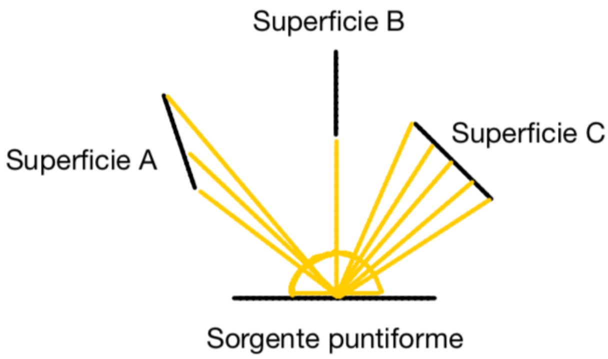

Figura 5: Ruolo del fattore di forma

d'angolo, è una grandezza geometrica indipendente dalla temperatura del corpo e dalle sue proprietà superficiali. F_{ij} indica la frazione della radiazione emessa dalla superficie i che incide direttamente sulla superficie j. Esso può assumere un valore compreso tra 0 e 1: il primo caso corrisponde all'eventualità che le superfici i e j non siano in vista tra loro; il secondo caso si ha nel momento in cui la superficie j circonda la superficie i così da captare tutta la radiazione che i emette.
Ritorniamo al flusso termico.
La (17) vale da punto di vista del corpo 1. Se consideriamo la superfcie 2 si ha:

$$q_{21} = \sigma_0 \cdot A_2 \cdot F_{21} \cdot (T_2^4 - T_1^4). \tag{18}$$

Poichè

$$q_{21} = -q_{12}, \tag{19}$$

vale il **teorema di reciprocità**:

$$A_1 \cdot F_{12} = A_2 \cdot F_{21}. \tag{20}$$

Trasmissione tra superfici grigie

Nel caso di corpi grigi, i soli fattori di forma non ci permettono di valutare lo scambio di calore per irraggiamento perchè si verificano fenomeni di riflessione di energia.
Se la superficie A_1 emette una potenza raggiante totale pari a $J_1 \cdot A_1$, la parte F_{12} incide sulla superficie 2. La superficie 2 ne assorbe la quantità η_2 e ne reinvia la quantità $(1 - \eta_2)$. Sulla superficie 1 giunge, perciò, la quantità:

$$J_1 \cdot A_1 \cdot (1 - \eta_2) \cdot F_{12} \cdot F_{21} \tag{21}$$

di cui una parte viene reinviata e cosi via.
In definitiva si può dimostrare che il flusso termico tra superfici grigie è dato da:

$$q_{12_g} = \sigma_0 \cdot A_1 \cdot (T_1^4 - T_2^4) \cdot \frac{\eta_1}{1 - (1 - \eta_1)(1 - \eta_2)F_{12} \cdot F_{21}}. \tag{22}$$

Nel caso di lastre piane di area efficientemente grande rispetto alla loro distanza (ipotesi che permette di trascurare ciò che succede ai bordi) si ha $F_{12} = F_{21} = 1$ e quindi la potenza termica scambiata per irraggiamento è:

$$\dot{Q}_{12} = \frac{\sigma_0 \cdot A_1 \cdot (T_1^4 - T_2^4)}{\frac{1}{\eta_1} + \frac{1}{\eta_2} - 1}. \tag{23}$$

Il coefficiente h_r

Nei problemi di scambio termico per adduzione si ha a che fare sia con fenomeni di scambio termico per convezione che per irraggiamento.
Per studiare questo tipo di problema è opportuno definire un **coefficiente di scambio termico per irraggiamento** h_r che abbia lo stesso ruolo di h_c nella convezione. Tale coefficiente, ricavabile manipolando matematicamente la (23), è:

$$h_r = \frac{4 \cdot \sigma_0 \cdot T_m^3}{\frac{1}{\eta_1} + \frac{A_1}{A_2}(\frac{1}{\eta_2} - 1)} \tag{24}$$

dove $T_m = \left(\frac{T_1+T_2}{2}\right)$ è la temperatura media.
La somma dei coefficienti h_c e h_r definisce il **coefficiente di scambio termico per adduzione**:

$$h_a = h_c + h_r \tag{25}$$

in virtù del quale il flusso termico scambiato per convezione e irraggiamento diventa:

$$\dot{Q}_a = h_c \cdot A_1 \cdot (T_1 - T_f) + h_r \cdot A_1 \cdot (T_1 - T_2) \qquad (26)$$

dove

T_f = temperatura del fluido;

T_1 = temperatura del corpo grigio di superficie A_1;

h_r = coefficiente di scambio termico per irraggiamento.

Se $T_f = T_2$, la precedente equazione può essere riscritta come:

$$\dot{Q} = h_a \cdot A_1 \cdot (T_1 - T_2). \qquad (27)$$

dove $h_a = h_c + h_r$.