Corda vibrante

G.F.G.

11 luglio 2018

"To not know mathematics is a severe limitation to understanding the world!" - Richard Feynman

1 Introduzione

In fisica, con il termine *onda* indichiamo una perturbazione che si propaga nel tempo e nello spazio trasportando energia ma non materia. Tra i vari tipi di onde esistenti consideriamo le seguenti:

Onde progessive

Sono onde descritte da una funzione del tipo

$$u(x,t) = g(x - ct).$$

La funzione $g(x)$ rappresenta il profilo iniziale dell'onda, il quale viaggia alla velocità $|c|$ lasciando inalterata la sua forma. Esso si propaga verso destra se $c > 0$ e verso sinistra se $c < 0$.

Onde Armoniche

Sono onde progressive e periodiche (*i punti del mezzo materiale all'interno del quale si propagano ripetono gli stessi movimenti a intervalli di tempo regolari*) tali che i punti del mezzo materiale in cui esse si propagano si muovono di moto armonico. Sono descritte da una funzione del tipo

$$u(x,t) = Acos(kx - \omega t)$$

dove

1. A è l'*ampiezza dell'onda*, cioè la differenza tra il valore massimo della grandezza che oscilla e il suo valore di equilibrio;

2. k è il *numero d'onde*, ossia il numero di oscillazioni complete nell'intervallo $[0, 2\pi]$;

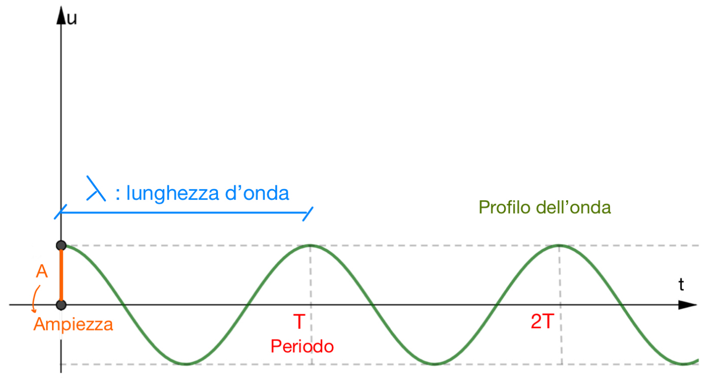

Figura 1: Profilo di un'onda con alcuni parametri caratteristici

3. ω è la *frequenza angolare*, o *pulsazione*.

Altri parametri che caratterizzano le onde armoniche sono:

- la *frequenza*, ossia il numero di oscillazione complete che l'onda compie nell'unita di tempo;

$$f = \frac{\omega}{2\pi}$$

- la *lunghezza d'onda* λ, cioè la minima distanza dopo cui l'onda torna a riprodursi identica a se stessa (tale valore rappresenta, quindi, anche la distanza tra due massimi (o minimi) successivi);

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

- il *periodo* T, cioè l'intervallo temporale in cui un punto del mezzo materiale compie un'oscillazione completa; è il reciproco della frequenza, cioè:

$$T = \frac{1}{f}$$

- la *velocità di propagazione* o *velocità di fase*, cioè la velocità con cui viaggiano, ad esempio, le creste dell'onda.

$$c = \frac{\omega}{k}$$

  o, equivalentemente,

$$c = \frac{\lambda}{T}$$

Onde stazionarie

Sono onde rappresentate da funzioni del tipo:

$$u(x,t) = Bcos(kx)cos(\omega t).$$

Tali onde non si propagano nello spazio: presentano una base sinusoidale $cos(kx)$, modulata in ampiezza nel tempo da $Bcos(\omega t)$. Dalle formule di Werner, in particolare nel nostro caso dalla seconda ($cos(\alpha)cos(\beta) = \frac{1}{2}[cos(\alpha+\beta) + cos(\alpha-\beta)]$), si vede che un onda stazionaria è ottenibile come sovrapposizione di due onde armoniche aventi identica ampiezza, che si propagano in versi opposti

$$Acos(kx - \omega t) + Acos(kx + \omega t) = 2Acos(kx)cos(\omega t).$$

E' fondamentalmente una sovrapposizione di questo tipo quella che si verifica quando, ad esempio, pizzichiamo le corde di una chitarra: l'impulso genera onde che si propagano in versi opposti e, arrivate alle estremità, si riflettono dirigendosi ai capi opposti e così via. La sovrapposizione di tutte queste onde della stessa frequenza origina l'onda stazionaria.

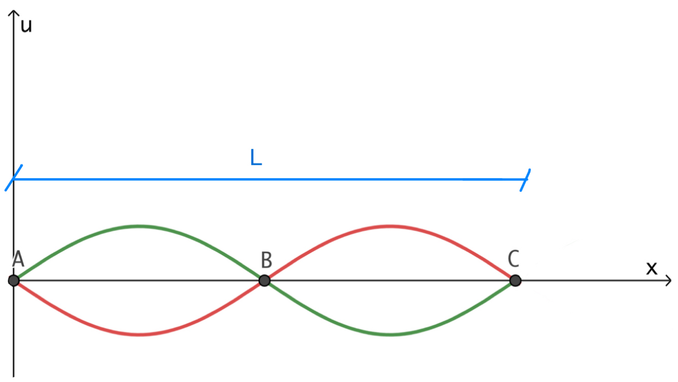

Figura 2: Uno dei modi di vibrazione di una corda di lunghezza L

2 Nota storica

Già gli antichi greci sapevano che una corda produce note musicali differenti a seconda del modo in cui viene sollecitata. Si dice che Pitagora avesse scoperto che due corde simili, di lunghezza differente e soggette alla stessa tensione, pizzicate insieme producevano un suono piacevole se le loro lunghezze erano in rapporto di due numeri interi e piccoli. Vari studiosi cercarono, nel corso degli anni, di determinare la relazione esistente tra l'altezza del suono e la lunghezza della corda. Per molti di loro l'altezza dipendeva dalla frequenza di vibrazione, ma come questa dipendesse dalla lunghezza della corda era un fatto ignoto. Fu solo nel 1615 che Isaac Beeckman riuscì a mostrare, con argomentazioni geometriche, che la frequenza di vibrazione era inversamente proporzionale alla lunghezza della corda. Con quest'assunzione, il rapporto tra le lunghezze scoperto da Pitagora può essere letto come un rapporto tra le frequenze. La relazione tra la frequenza f, la tensione τ, l'area della sezione della corda A, e la sua lunghezza L fu scoperta sperimentalmente da Marsenne ($f \propto \frac{1}{L}\sqrt{\frac{\tau}{A}}$) e derivata matematicamente da Taylor nel 1713. Quest'ultimo, sviluppando quel ramo della ricerca matematica che oggi è chiamato calcolo alle differenze finite, riuscì a determinare la forma di una corda vibrante. Fu comunque D'Alembert che studiando il problema di una corda di violino in vibrazione, partendo dai risultati ottenuti da Bernoulli per lo stesso problema, arrivò a quella che oggi è nota come *equazione della corda vibrante* o *equazione di D'Alembert*.

3 L'equazione della corda vibrante (o equazione delle onde monodimensionale)

Consideriamo una corda monodimensionale, quale può essere quella di una chitarra, e supponiamo di voler scrivere un modello che descriva le sue piccole vibrazioni trasversali. Adottiamo le seguenti ipotesi semplificative:

1. le vibrazioni della corda sono piccole;
2. i punti della corda si spostano solo verticalmente;
3. lo spostamento di un punto della corda è funzione della sua posizione e del tempo;
4. la corda è perfettamente flessibile;
5. l'attrito è trascurabile.

Con tali ipotesi, l'equazione che descrive il moto della corda (cioè l'equazione che descrive lo spostamento u dei punti della corda) può essere ottenuta dalla conservazione della massa e dal bilancio della quantita di moto. Tralasciando i dettagli riguardanti la sua derivazione, indicando con $u(x,t)$ la funzione che descrive lo spostamento dei punti della corda dalla configurazione di quiete, l'equazione a cui si perviene è la seguente:

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = f(x,t) \tag{1}$$

con $c^2 = \frac{\tau_0}{\rho_0}$ (cioè: $\frac{\textit{tensione in posizione di equilibrio}}{\textit{densità in posizione di equilibrio}}$) e $f(x,t)$ risultante delle forze per unità di massa applicate alla corda. Si noti che abbiamo assunto il materiale omogeneo (densità costante) e la corda perfettamente elastica (tensione costante). Il termine c rappresenta la *velocità di perturbazione.*
L'equazione (1) è detta *equazione delle onde (monodimensionale).*

4 Il problema di Cauchy-Dirichlet

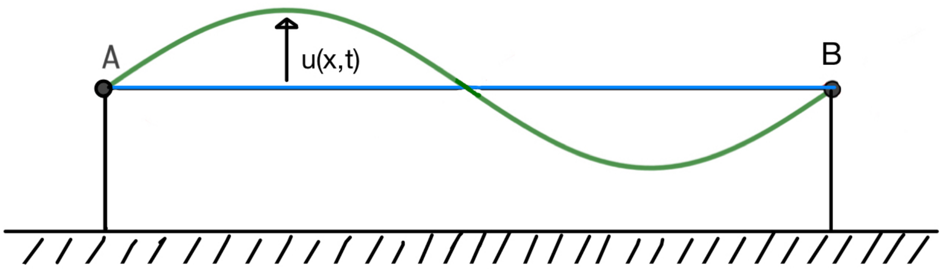

Figura 3: Uno dei modi di vibrazione di una corda di lunghezza L.

Supponiamo di pizzicare, all'instante t_0 una corda di una chitarra che abbia la forma iniziale, rispetto all'asse x, descritta dalla funzione $g(x)$ e una velocità iniziale descritta dalla funzione $h(x)$. Assumiamo che la lunghezza della corda a riposo sia L e che essa, in condizioni di riposo, giaccia sull'asse x occupando l'intervallo $[0, L]$. Assumiamo, inoltre, che gli estremi della corda siano bloccati. Le condizioni assegnate agli estremi della corda vengono dette *condizioni di Dirichlet*; le condizioni assegnato al tempo iniziale sono le *condizioni di Cauchy.* Diciamo allora che il fenomeno viene modellizzato con il *problema di Cauchy-Dirichlet*:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & 0 < x < L, t > 0 \\ u(0,t) = u(0,L) = 0 & t \geq 0 \\ u(x,0) = g(x), u_t(x,0) = h(x) & 0 \leq x \leq L \end{cases} \tag{2}$$

La prima riga del sistema rappresenta l'equazione delle onde omogenea (l'omogeneità deriva dal fatto che la corda è stata solo pizzicata e non c'è, quindi, una forza f che sollecita la corda con continuità).
La seconda riga del sistema rappresenta le condizioni di Dirichlet (condizioni al bordo): abbiamo scritto matematicamente che lo spostamento della corda è nullo agli estremi $x = 0$ e $x = L$.
La terza riga del ristema rappresenta le condizioni iniziali di Cauchy: abbiamo assunto che se la corda in condizioni di quiete si trova sull'asse x

occupando l'intervallo $[0, L]$, all'istante iniziale $t = 0$ essa ha una forma descritta dalla funzione $g(x)$ e una velocità iniziale descritta dalla funzione $h(x)$.
Tralasciando le ipotesi relative all'esistenza e all'unicità della soluzione, alla sua dipendenza continua dai dati e alla buona posizione del problema, cerchiamo una soluzione per separazione di variabili (procedimento perseguibile in virtù del fatto che le condizioni di Dirichlet sono omogenee).
Sia

$$u(x, t) = q(t)v(x)$$

la soluzione che stiamo cercando. Sostituendola all'interno dell'equazione delle onde perveniamo a

$$\frac{1}{c^2}\frac{q''(t)}{q(t)} = \frac{v''(x)}{v(x)}. \tag{3}$$

Poichè il primo membro dell'equazione dipende da t e il secondo membro dipende da x, l'uguaglianza varrà soltanto se i due membri assumono un valore costante, cioè se

$$\frac{1}{c^2}\frac{q''(t)}{q(t)} = \frac{v''(x)}{v(x)} = \alpha. \tag{4}$$

Abbiamo, quindi, ottenuto l'equazione

$$q''(t) - \alpha c^2 q(t) = 0 \tag{5}$$

e il problema agli autovalori

$$\begin{cases} v''(x) - \alpha v(x) = 0 \\ v(0) = v(L) = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Affinchè tale problema dia soluzioni non nulle si deve avere $\alpha < 0$. Ponendo allora $\alpha = -k^2$, la soluzione dell'equazione differenziale omogenea del secondo ordine è data da

$$v(x) = Asin(kx) + Bcos(kx) \tag{7}$$

e applicando le condizioni $v(0) = 0$ e $v(L) = 0$ ottieniamo $B = 0, A$ arbitrario e $kL = n\pi$, con $n = 1, 2, \cdots$ (quest'ultima condizione serve a far si che non si ottenga la soluzione nulla). Definendo il *numero d'onde* $k_n = n\frac{\pi}{L}$, la soluzione del problema è data da

$$v_n(x) = A_n sin(k_n x), \qquad k_n = n\frac{\pi}{L} \tag{8}$$

Veniamo ora alla parte temporale. Sostituendo $\alpha = -k_n^2$ all'interno dell'equazione, otteniamo $q''(t) + k_n^2 c^2 q(t) = 0$ e ponendo $\omega_n = ck_n$

$$q''(t) + w_n^2 q(t) = 0. \tag{9}$$

La soluzione della (9) è l'equazione di un moto armonico (nella variabile t) ed è data da

$$q(t) = C_n cos(\omega_n t + \phi_n) \tag{10}$$

(se qualcuno notasse una differenza con la soluzione della (7) sappia che ci si può ricondurre a una soluzione di quella forma utilizzando la formula di addizione $cos(\alpha + \beta) = cos(\alpha)cos(\beta) - sin(\alpha)\sin(\beta)$).
A questo punto, sostituendo la (9) e la (10) nella $u(x,t)$, otteniamo la famiglia di soluzioni:

$$u_n(x,t) = A_n cos(\omega_n t + \phi_n) sin(k_n x) \tag{11}$$

Ognuna delle u_n descrive un possibile moto della corda, detto *m-esimo modo di vibrazione* o *m-armonica*, e rappresenta un'onda stazionaria avente **pulsazione** pari a ω_n, **frequenza** pari a

$$f = \frac{\omega_n}{2\pi} \tag{12}$$

lunghezza d'onda pari a

$$\lambda = \frac{2\pi}{k_n} \tag{13}$$

e **periodo** pari a

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n}. \tag{14}$$

5 Qualche formula di goniometria per affrontare gli esercizi sulle onde

Le formule di Werner

Le formule di Werner permettono di trasformare prodotti di funzioni goniometriche in somme e differenze di funzioni goniometriche.
La prima formula di Werner asserisce che:

$$sin(\alpha)cos(\beta) = \tfrac{1}{2}[sin(\alpha + \beta) + sin(\alpha - \beta)].$$

La seconda formula di Werner asserisce che:

$$cos(\alpha)cos(\beta) = \tfrac{1}{2}[cos(\alpha + \beta) + cos(\alpha - \beta)].$$

La terza è data da:

$$sin(\alpha)sin(\beta) = \tfrac{1}{2}[cos(\alpha - \beta) - cos(\alpha + \beta)].$$

Somma di funzioni periodiche in seno e coseno

Siano date le funzioni $f_1(x) = A_1 sin(\omega_1 x)$ e $f_2(x) = A_2 sin(\omega_2 x)$. Essendo le funzioni seno e coseno periodiche di periodo 2π, le funzioni $f1$ e $f2$ hanno periodi dati, rispettivamente, da:

$$T_1 = \frac{2\pi}{|\omega_1|} \qquad \text{e} \qquad T_1 = \frac{2\pi}{|\omega_1|}.$$

Consideriamo ora la funzione $F(x) = f_1(x)+f_2(x) = A_1 sin(\omega_1 x)+A_2 sin(\omega_2 x)$. Assumendo che il rapporto tra i periodi di f_1 e f_2 sia un numero razionale diverso da 1, cioè:

$$\frac{T_1}{T_2} = q \in \mathbb{Q}, \quad q \neq 1,$$

il periodo T di F è dato dal minimo comune multiplo dei periodi di f_1 e f_2, cioè:

$$T = mcm(T_1, T_2).$$

Nel caso in cui $\frac{T_1}{T_2} = 1$ il periodo della funzione $F(x)$ è minore o uguale del periodo delle funzioni $f_1(x)$ e $f_2(x)$.

6 Sovrapposizione di onde

Sovrapposizione di onde sinusoidali che viaggiano nello stesso verso

Su una corda, consideriamo due onde sinusoidali aventi lo stesso verso di propagazione, la stessa ampiezza A, la stessa frequenza f e la stessa lunghezza d'onda λ. Utilizzando il principio di sovrapposizione degli effetti, l'onda risultante può essere espressa come

$$u(x,t) = Asin(kx - \omega t) + Asin(kx - \omega t + \phi) = 2Acos(\frac{\phi}{2})sin(kx - \omega t + \frac{\phi}{2}). \tag{15}$$

Abbiamo, quindi, ottenuto un'onda che viaggia nello stesso verso delle onde originarie e la cui ampiezza dipende dalla differenza di fase ϕ delle onde che si sovrappongono.
Si notino i casi limite:
per $\phi = 0$ le onde sono infase e si ha quella che viene chiamata interferenza costruttiva;
per $\phi = 180°$ le onde sono in opposizione di fase e si ha l'interferenza distruttiva, in cui le onde si annullano a vicenda.

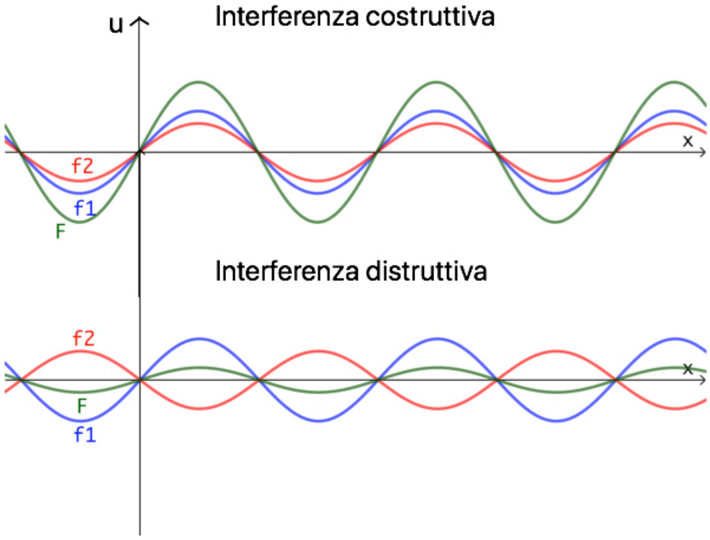

Figura 4: Somma di due onde in fase (immagine superiore); Somma di due onde in opposizione di fase (immagine inferiore).

Sovrapposizione di onde sinusoidali che viaggiano nello stesso verso

Su una corda, consideriamo ora due onde sinusoidali aventi versi di propagazione opposti, stessa ampiezza A, stessa frequenza f e stessa lunghezza d'onda λ. Utilizzando il principio di sovrapposizione degli effetti, l'onda risultante può essere espressa come

$$u(x,t) = Asin(kx - \omega t) + Asin(kx + \omega t + \phi) = 2Acos(\omega t)sin(kx). \quad (16)$$

Come gia detto precedentemente, l'onda risultante non è un'onda viaggiante ma un'onda stazionaria. L'ampiezza di tale onda è variabile nel tempo ed è data da

$$A(t) = 2Acos(\omega t).$$

Una caratteristica delle onde stazionarie è che esse hanno dei punti fissi che subiscono il massimo spostamento e lo spostamento nullo. I primi sono detti *ventri*, i secondi sono detti *nodi*.

Onde stazionare su una corda tesa fissata agli estremi

Quando si pizzica una corda tesa avente gli estremi fissati, si generano delle onde che propagano in versi opposti e che subendo riflessioni continue di sommano. Affinchè si abbia interferenza costruttiva è necessario, dal momento che gli estremi sono dei nodi, che

$$u(0,t) = 2Acos(\omega t)sin(0) = 0$$

e

$$u(L,t) = 2Acos(\omega t)sin(kL) = 0 \text{ per ogni } t > 0.$$

La prima relazione è sempre verificata mentre la seconda implica:

$$sin(kL) = 0 \Rightarrow KL = n\pi \rightarrow \frac{2\pi}{\lambda}L = n\pi \rightarrow L = n\frac{\lambda}{2}, \text{ con } n = 1, 2, 3, \cdots.$$

I diversi valori di n corrispondono ai diversi modi di vibrazione della corda (n da informazioni sul numero di onde presenti sulla corda). A partire da $n = 1$, che identifica l'*armonica fondamentale* (quella in cui i nodi sono solo 2, cioè gli estremi), per ogni modo di vibrazione il numero dei nodi è dato da $n + 1$.

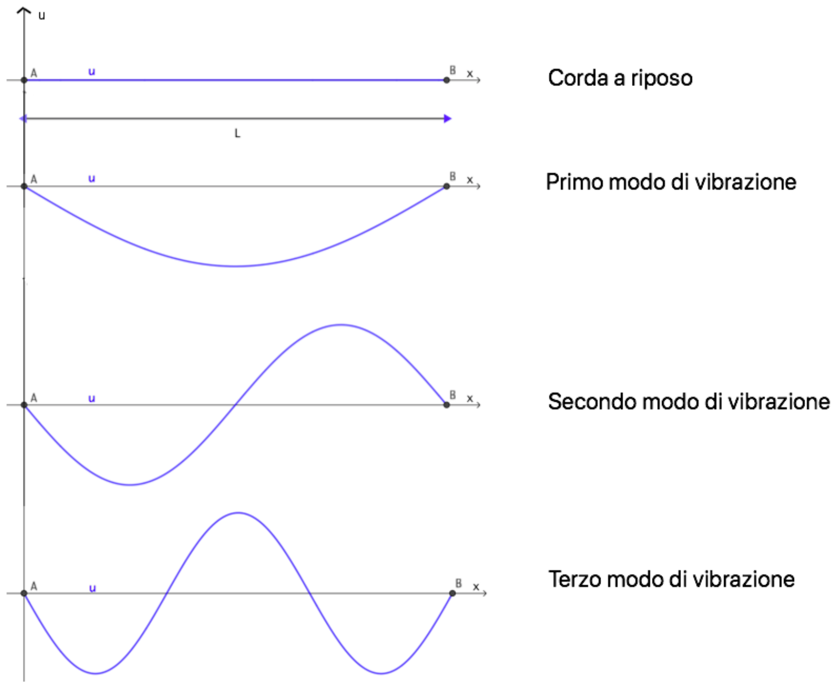

Figura 5: Alcuni dei modi di vibrazione di una corda

Riferimenti bibliografici

[1] V. I. Arnold: *Lectures on Partial Differential Equations*, Springer

[2] R. Feynman: *Lectures on Physics*, Vol. 1

[3] L. Gunther: *The physics of Music and Color*, Springer

[4] S. Salsa: *Equazioni a derivate parziali: metodi, modelli e applicazioni*, Springer

[5] I. Stewart: *Domare l'infinito*, Bollati Boringhieri

[6] J. Stillwell: *Mathematics and Its History*