SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali
Corso di laurea in Matematica

Piastra vibrante e figure di Chaldni

Candidato
Giuseppe Francesco Gentile

Relatore
Stefano Finzi Vita

A/A 2016/2017

"If you want to find the secrets of the universe, think in terms of energy, frequency and vibration." - Nikola Tesla

Prefazione

Il presente lavoro concerne la teoria della piastra vibrante, in particolar modo la sua modellizzazione matematica e la sua trattazione numerica. Tale argomento è stato scelto per quattro motivi principali:

1. l'interesse per la storia della sua nascita, che vede coinvolti esimi matematici e scienziati;

2. la sua versatilità, dal momento che tale modello viene applicato dal campo aerospaziale a quello musicale;

3. l'interesse nei confronti dell'operatore biarmonico, che esce fuori nel modellizzare la piastra vibrante, e nei confronti della sua trattazione numerica;

4. l'interesse per l'analisi strutturale.

Ho strutturato questa tesi sviluppando i quattro punti di cui sopra: nel Capitolo 1, dopo un breve escursus storico concernente lo sviluppo della teoria della piastra vibrante, passando dall'Europa alla Russia, enumero alcune applicazioni pratiche di tale teoria soffermandomi in particolare sulle *figure di Chladni* e sul famoso *crash* del ponte di Tacoma. Successivamente, nel Capitolo 2, ponendomi l'obiettivo di ottenere numericamente le figure di Chladni, tratto la modellizzazione della piastra vibrante, dalle ipotesi ingegneristiche sui materiali alla formulazione matematica del problema. Nel Capitolo 3 mostro due dei metodi utilizzati per la risoluzione dell'equazione differenziale ottenuta nel Capitolo 2: il primo metodo è quello usato da Ritz, che per primo riuscì a determinare numericamente le figure di Chladni; il secondo è il metodo delle differenze finite. Nel Capitolo 4 mostro i risultati numerici ottenuti implementanto i due metodi in Matlab e Maple, confrontandoli tra loro e con i risultati sperimentali ottenuti da Chladni. La scelta dei due software è stata dattata da due ragioni principali: in Maple è molto semplice ed intuitivo l'utilizzo del linguaggio simbolico; Matlab è, invece, molto comodo nella gestione delle matrici.

Indice

1 Retroscena storico **4**

2 Modellizzazione matematica delle vibrazioni **12**
2.1 La piastra di Kirchhoff 12
2.2 Equazioni del moto 13
2.3 Formulazione variazionale del problema 15
2.4 Dalla forma debole alla forma forte 17
2.5 Un problema agli autovalori 21
2.6 Principio del min-max 22

3 Discretizzazione **24**
3.1 L'idea di Ritz 24
3.2 Discretizzazione con le differenze finite 27

4 Risultati numerici **34**
4.1 Figure di Chladni 34
4.1.1 Confronto tra le figure di Chladni ottenute con il metodo spettrale di Ritz e quelle ottenute con il metodo delle differenze finite 37
4.1.2 Confronto tra gli autovalori ottenuti da Chladni, quelli ottenuti da Ritz e quelli calcolati implementanto il metodo spettrale in Maple e le differenze finite in Matlab 40

Capitolo 1

Retroscena storico

Nel 1787 il fisico e musicista Ernst Florence Friedrich Chladni fece un'interessante scoperta: eccitando con l'arco del suo violino una piastra metallica, fissata solo al centro, riusciva a ottenere suoni di intonazione differente a seconda del punto della piastra che sollecitava. Successivamente, si accorse che se sulla piastra si depositava della polvere, o vi si disponeva della sabbia, per ogni intonazione apparivano pattern differenti e magnifici (Figura 1.1). Nel suo libro sull'acustica [4], Chladni descrisse diversi esperimenti con le piastre vibranti determinando anche le frequenze corrispondenti ai vari pattern che otteneva. Le *figure di Chladni*, così come vengono chiamate oggi, attirarono l'attenzione di molti scienziati, e non solo. Nel 1809 il fisico fu invitato dall'Accademia Francese delle Scienze a effettuare i suoi esperimenti in pubblico. A tale spettacolo presenziò anche l'imperatore Napoleone, che rimase parecchio impressionato dalla dimostrazione dello scienziato. Seguendo il suggerimento dell'imperatore, l'Accademia bandì un concorso richiedendo un saggio scientifico concernente la piastra vibrante, in cui i risultati sperimentali fossero giustificati da una teoria matematica. All'inizio non fu inviato alcun documento cosicchè la durata del bando venne prolungata. Alla fine, nell'ottobre del 1811, il giorno di chiusura del concorso, l'Accademia ricevette solo un articolo intitolato *"Reserches sur la théorie des surfaces élastiques"*, scritto dalla matematica Sophie Germain. Lagrange, che era uno dei giudici, notò un errore matematico nella teoria presentata e lo corresse. Non essendo completamente soddisfatti dal lavoro di Germain, i giudici decisero di riproporre l'argomento. Nell'ottobre del 1813, Sophie Germain inviò una rivisitazione del suo lavoro, che risultò ancora inadeguato. Al suo terzo tentativo, nel 1826, il lavoro della scienziata suscitò ancora critiche, dal momento che conteneva ragionamenti matematici e fisici poco chiari, ma si decise comunque di premiare il suo coraggio e la sua determinazione assegnandole il premio. Migliorie successive alla soluzione del problema furono apportate da Poisson, che non riuscì, tuttavia, a risolverlo totalmente. Alla fine, fu il famoso ingegnere e scienziato L. Navier che pervenne alla prima

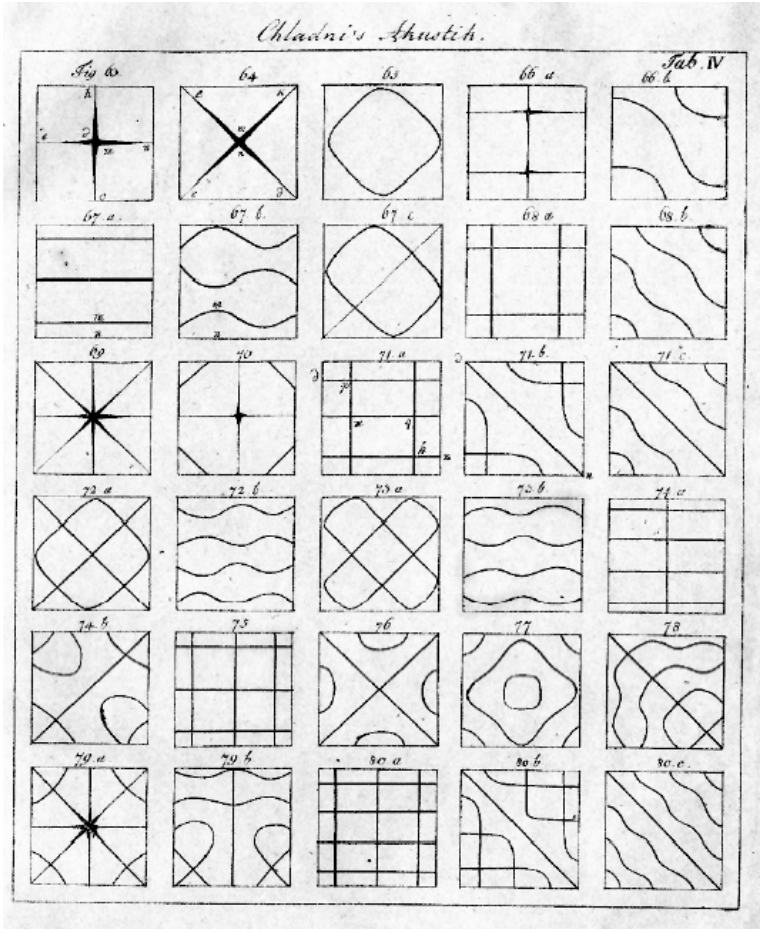


Figura 1.1: Disegni delle Figure di Chladni

equazione differenziale corretta per le piastre soggette a carichi statici distribuiti. Navier applicò le ipotesi di Bernoulli, già utilizzate con successo nello studio della deflessione delle travi, aggiungendovi, però, le altre due dimensioni. Dopo aver determinato l'equazione differenziale, lo scienziato ne cercò la soluzione. Per alcune condizioni al contorno Navier introdusse un metodo che trasformava l'equazione differenziale in un'equazione algebrica. Il suo approccio era basato sull'utilizzo delle serie trigonometriche introdotte da Fourier nello stesso decennio. Purtroppo, fallì nel tentativo di risolvere i casi più complessi. Fu Gustav R. Kirchhoff che sviluppò la prima teoria completa della piastra inflessa [13]. Egli ottenne la medesima equazione di Navier riuscendo, però, a esprimere tutte le condizioni al contorno in funzione dello spostamento trasversale e delle sue derivate rispetto a x e a y. Uno dei suoi contributi più significativi fu l'introduzione del *metodo degli spostamenti virtuali* per la risoluzione di vari problemi riguardanti le piastre.

Kirchhoff espose il suo lavoro in un lungo articolo del 1850. L'equazione a cui pervenne fu la seguente:

$$\Delta^2 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = f(x, y) \tag{1.1}$$

a cui andavano aggiunte le opportune condizioni al contorno. Ad esempio, per una piastra con i lati fissati, le condizioni al contorno sono:

$$w = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial w}{\partial x} = 0. \tag{1.2}$$

L'equazione dedotta da Kirchhoff mostrò che le figure ottenute da Chladni su una piastra quadrata corrispondono alle coppie autovalori-autofunzioni dell'operatore biarmonico con condizioni di bordo libero. Egli provò a risolvere il problema delle figure di Chladni su una piastra circolare, la cui simmetria semplificava il problema e le soluzioni. All'inizio del XX secolo l'esperto di teoria del suono John William Strutt, terzo barone di Rayleigh, riassunse la situazione nel suo monumentale trattato: *The problem of a rectangular plate, whose edge are free, is one of great difficulty, and has for the most part resisted attack.* Fu solo grazie a Walter Ritz, e al metodo da lui elaborato, che, nel 1909, si arrivò al primo calcolo corretto delle figure di Chladni su una piastra quadrata. A Gottinga, il principale centro di ricerca matematica in Europa e luogo in cui Ritz trascorse gli ultimi anni della sua vita, l'importanza della sua invenzione non fu colta immediatamente e il suo lavoro fu a lungo trascurato. In Russia, invece, il metodo di Ritz fu subito applicato per risolvere difficili problemi di ingegneria. Timoshenko, allora professore all'Istituto Politecnico di Kiev, poi docente a San Pietroburgo e successivamente a Stanford, fu il primo a comprendere la portata dell'invenzione di Ritz nelle scienze applicate. Egli stesso diede dei contributi importanti alla teoria della piastra inflessa e alla sua applicazione. Tra i più significativi c'è la soluzione delle piastre circolari considerando grandi deflessioni e la formulazione dei problemi di stabilità elastica. Insieme a Woinowsky-Krieger pubblicò un'imponente monografia [24] contenente una profonda analisi dei vari problemi delle piastre inflesse.
Un altro scienziato che contribuì allo sviluppo della teoria della piastra fu Ivan Bubnov, ingegnere strutturale specializzato nella costruzione navale, in particolare di sottomarini. Affascinato dal lavoro di Timoshenko, specialmente dalla semplicità del suo approccio e dall'accuratezza dei risultati, sviluppò un'intera batteria di problemi con soluzioni approssimate nel suo manuale di costruzione navale [2]. Bubnov fu il primo a introdurre la classificazione moderna delle piastre, introducendo, inoltre, un nuovo metodo di integrazione per le equazioni differenziali dell'elasticità. Egli diede anche un contributo fondamentale allo sviluppo del metodo agli elementi finiti in [3]. Il contributo successivo lo diede Galerkin che sviluppò il metodo di Bubnov e lo applicò a piastre di geometria arbitraria [8].

Al giorno d'oggi l'analisi delle piastre vibranti riveste un ruolo fondamentale in molte applicazioni, ed essa non può essere appresa senza conoscere la sottostante teoria della piastra.

Le piastre sono dei componenti strutturali diritti, piani, in cui una dimensione, lo spessore, è molto più piccola delle altre. Esse, in realtà, non vengono utilizzate soltanto come componenti strutturali ma anche per completare le strutture (si pensi ai ponti lastricati). Dal punto di vista statico possono essere legate a una struttura con varie tipologie di vincolo (incastrate, appoggiate . . .). I carichi statici e dinamici che vi agiscono sopra sono applicati soprattutto perpendicolarmente alla sua superficie. Essi inducono nella piastra uno stato di sforzo interno, principalmente flessione, torsione e taglio. L'azione strutturale bidimensionale delle piastre fa si che le strutture risultino più leggere e ciò comporta notevoli vantaggi economici. Inoltre, numerose configurazioni strutturali richiedono una parziale o completa chiusura e ciò può essere ottenuto facilmente con tali componenti, eliminando coperture addizionali e risparmiando, quindi, sui materiali e sui costi di lavoro. Conseguentemente, al comportamento delle piastre, e delle strutture piane, è stata data particolare importanza nel corso degli anni.

In ambito ingegneristico, molti componenti strutturali possono essere assimilati a lastre piane. Ad esempio, nell'ambito dell'ingegneria civile ci sono pavimenti e lastre di fondazione, porte di chiusura, pareti sottili, i rivestimenti e le lastricature dei ponti. Sono indispensabili anche nella costruzione navale e nell'industria aerospaziale. Le ali e una grande parte della fusoliera consistono di una piastra sottile con una serie di elementi longitudinali rigidi. Lo scafo di una nave, il suo ponte e la sua sovrastruttura sono ulteriori esempi di strutture a piastra rigide. Le piastre sono, inoltre, parti di macchinari o di altri dispositivi meccanici (si veda la Figura 1.2).
Quando si svolge un'analisi strutturale, l'obiettivo che si persegue è quello di assicurarsi che la struttura in esame abbia non solo un adeguato fattore di sicurezza contro la rottura ma anche un costo economico ragionevole. Per di più, la struttura deve risultare funzionale quando sottoposta a carichi di progetto e tale funzionalità può richiedere, ad esempio, una limitazione alla deflessione. La maggior parte delle strutture piane viene analizzata applicando le equazioni che governano la teoria dell'elasticità. La soluzione esatta delle equazioni differenziali che governano la teoria della piastra può essere, però, ottunuta solo nel caso di particolari condizioni al contorno e particolari condizioni di carico. Nella maggior parte dei casi essa deve essere determinata attraverso l'utilizzo di metodi numerici. La stragrande maggioranza di questi metodi si basa sulla discretizzazione della piastra continua.

Poichè le strutture reali sono troppo complesse per essere analizzate, esse

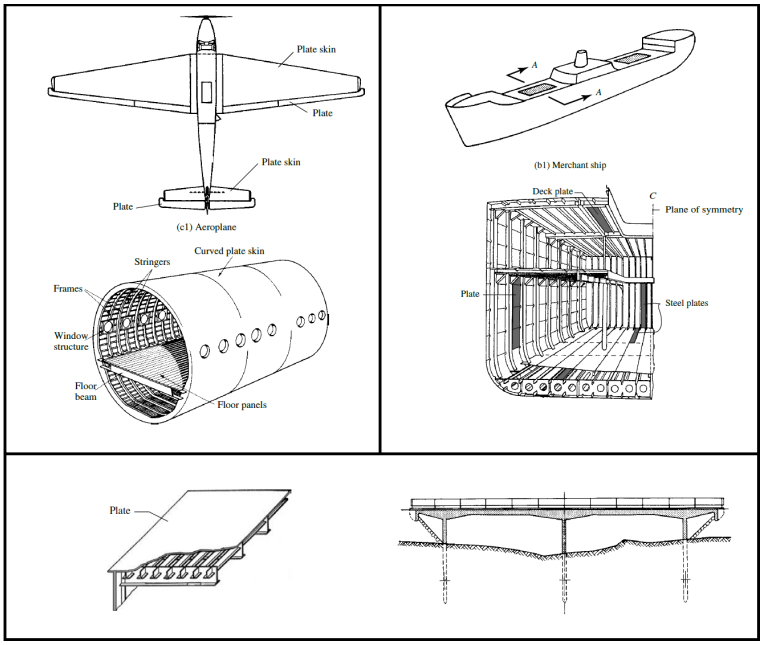


Figura 1.2: Settori di applicazione della teoria della piastra vibrante: settore aeronautico (a sinistra); settore navale (a destra); settore edile-civile (in basso)

devono essere sostituite da loro idealizzazioni, da modelli più semplici che conservano solo i parametri importanti per lo studio in esame, in particolar modo quelli che influenzano la risposta satica e dinamica delle strutture alle sollecitazioni esterne. Nel modellizzare le piastre tali idealizzazioni riguardano:

1. la sua geometria e i suoi supporti;
2. il comportamento del materiale utilizzato;
3. la tipologia dei carichi e la modalità con cui sono applicati.

Guidati da vincoli legati alla sicurezza e al peso, soprattutto nei settori aerospaziale e navale, bisogna, perciò, essere più che certi che tali idealizzazioni portino ad un analisi strutturale corretta e a risultati realistici per quel che riguarda la distribuzione delle tensioni interne, delle deformazioni e degli spostamenti nell'intera struttura o in una parte di essa.
Uno degli esempi più eclatanti di un collasso strutturale dovuto alle vibrazioni è il collasso del ponte di Tacoma nel 1940 (Figura 1.3).

Dal primo giorno in cui fu aperto al traffico, il primo luglio 1940, il Tacoma Narrows fu soprannominato *Galopping Gertie* a causa dei suoi movimenti ondulatori in presenza di vento. Il ponte di Tacoma era formato

First Picture of Narrows Bridge Falling

LANGLIE LEADING BY 2,045

SUNRISE EXTRA

Seattle Post-Intelligencer

VOL. CXIX, NO. 47 — SEATTLE, FRIDAY, NOVEMBER 8, 1940 — THIRTY-TWO PAGES — DAILY 5c, SUNDAY 10c

Going Down

Mayor Holds Onto His Slim Advantage

Bandits Slay Two

U. Engineer Describes Close Escape on Span

TODAY'S

Narrows Span Lies At Bottom of Sound

Figura 1.3: La prima immagine del collasso del ponte di Tacoma

da due torri alte 126 metri, distanti tra loro 840 m, dalle quali partivano dei cavi ancorati 330 m al di là delle torri. Poiché le travi di irrigidimento erano alte 2,4 m, ed erano molto sottili rispetto alla luce del ponte, il Tacoma bridge era 3 volte più flessibile sia del *Golden Gate* di San Francisco che del ponte *George Washington* di New York, i due soli ponti del tempo più lunghi del Tacoma Bridge. La forte snellezza dell'impalcato, che rendeva difficile qualsiasi confronto con altre opere esistenti, aveva suggerito che il comportamento dinamico del ponte fosse studiato mediante prove su modello. Queste furono realizzate da Farquharson alla fine del 1939 presso l'Università di Washington [7] su un modello in scala 1:100. Le prove erano volte ad individuare i parametri dinamici della struttura, in particolar modo le forme modali, i rapporti tra le frequenze, e la risposta alle sollecitazioni che gli venivano impartite attraverso un sistema di 100 elettromagneti, volte

Figura 1.4: La fase oscillatoria del ponte di Tacoma

a simulare le azioni del traffico e del vento. Nella realizzazione del modello fu deliberatamente trascurato il comportamento torsionale, in quanto "*the bridge was not critical in torsion*" [7]. Numerose testimonianze di automobilisti rivelarono che durante l'attraversamento del ponte era possibile veder scomparire e riapparire più volte le altre automobili [16]. Dalle immagini (Figura 1.4) e dai video che hanno come oggetto il movimento del ponte che lo ha portato a collassare, si nota che la campata centrale assomiglia a una piastra che vibra in uno dei suoi modi propri. Ciò suggerisce che se volessimo una prima approssimazione della forma della campata soggetta a vibrazione, potremmo considerarla come una piastra vibrante e considerare gli autovalori e gli autovettori associati all'equazione biarmonica. Questa modellizzazione ignora, ovviamente, molti aspetti strutturali e, soprattutto, non spiega cosa ha eccitato il ponte. A tal rigurado, molti testi di fisica parlano ancora del collasso del ponte di Tacoma come un esempio di risonanza indotta da una forzante periodica. Tale spiegazione, però, si è rivelata sbagliata: un semplice esperimento di fisica [20], condotto utilizzando una ventola e una scatola (Figura 1.5), ha mostrato chiaramente che le oscillazioni possono iniziare in assenza di una forzante periodica.

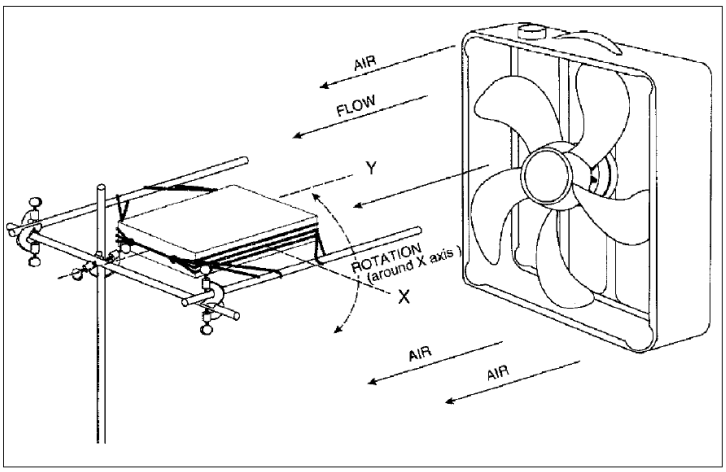


Figura 1.5: L'apparato sperimentale utilizzato per studiare l'innesco delle vibrazioni del ponte di Tacoma

Inoltre, esiste una controversia sul se un modello lineare possa portare alla nascita di oscillazioni così sostenute o se sia necessario un modello non lineare che tenga conto dei cavi e delle altre strutture attaccate al ponte.
Nonostante quanto detto, il modello della piastra vibrante consente, grazie alla sua semplicità, di ottenere una buona approssimazione della forma del ponte soggetto a vibrazione e vale quindi la pena di considerarlo.

Capitolo 2

Modellizzazione matematica delle vibrazioni

2.1 La piastra di Kirchhoff

La trattazione matematica esatta dell'analisi tensionale di una piastra sottile, soggetta a carichi agenti normalmente alla sua superficie, richiede la soluzione di equazioni differenziali di elasticità tridimensionali. Nella maggior parte dei casi, tuttavia, tale approccio incontra notevoli difficoltà dal punto di vista matematico. Così, per la maggior parte delle applicazioni tecnologiche, la teoria classica di Kirchhoff delle piastre produce risultati sufficientemente accurati senza che sia necessario effettuare un'analisi completa dello stato tensionale di tipo tridimensionale. Essa è formulata in termini di spostamenti trasversali $w(x, y)$ e ciò fa si che l'equazione differenziale che governa il problema è del quarto ordine e richiede solo due condizioni al contorno che devono essere soddisfatte su ogni bordo. Le semplificazioni usate nella derivazione dell'equazione della piastra sono le seguenti:

1. il materiale è ELOI: elastico, lineare, omogeneo e isotropo; ciò fa si che esso segua la legge di Hooke;

2. la piastra inizialmente è piatta;

3. la sezione centrale della piastra rimane scarica durante la deformazione;

4. lo spessore della piastra, h, è costante e piccolo rispetto alle altre dimensioni; ciò vuol dire che la più piccola dimensione laterale della piastra è almeno 10 volte più grande dello spessore;

5. gli spostamenti trasversali $w(x, y)$ sono piccoli se comparati allo spessore della piastra; lo spostamento di un decimo dello spessore è cosiderato il limite massimo della teoria dei piccoli spostamenti;

6. le inclinazioni della superfice media deflessa sono piccole se comparate all'unità;

7. le sezioni normali alla superficie media prima della deformazione restano normali e piane alla superficie media deflessa. Conseguentemente, le deformazioni di taglio sono trascurabili. Questa assunzione rappresenta un'estensione alle piastre delle ipotesi di Bernoulli per le travi;

8. la tensione normale σ_z, trasversale alla superficie della piastra, può essere trascurata.

Con queste assunzioni, il problema originario tridimensionale si riduce a un problema bidimensionale. Per analizzare una piastra rettangolare è conveniente utilizzare una terna cartesiana ortonormale destra posta in maniera tale che i carichi esterni e interni, le tensioni e gli spostamenti lungo i tre assi coordinati u, v, w siano positivi quando concordi con gli assi x, y e z. Inoltre, consideriamo i momenti flettenti positivi se inducono una trazione nelle fibre localizzate nella parte inferiore della sezione considerata.

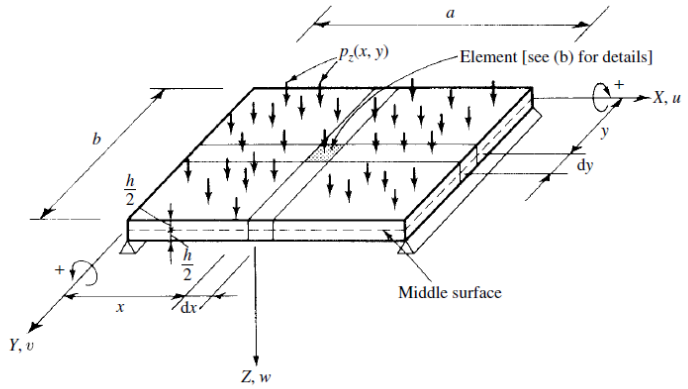


Figura 2.1: Piastra rettangolare caricata trasversalmente

2.2 Equazioni del moto

Si consideri una piastra (Figura 2.1) soggetta a un carico distribuito verticale, di intensità $p(x, y)$ applicato sulla sua superficie superiore e si equilibri un elementino infinitesimale di dimensioni dx, dy (Figura 2.2). Poichè le risultanti degli sforzi e delle coppie sono assunte applicate sul piano di mezzeria dell'elementino, il carico distribuito è trasferito anch'esso al piano centrale. Le dimensioni dell'elementino, che è molto piccolo, fanno si che le componenti delle forze e dei momenti possono essere considerate uniformemente

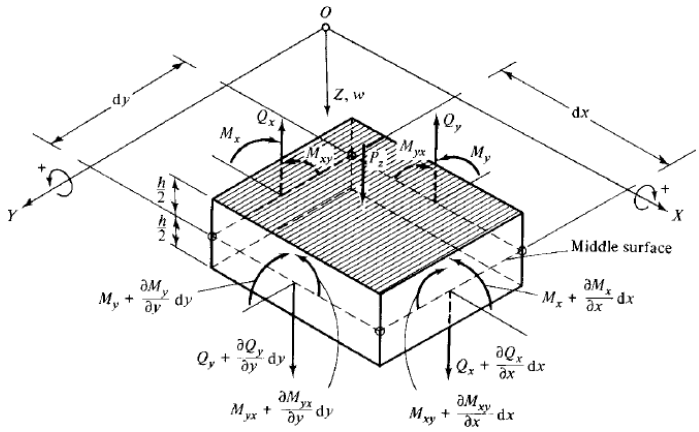


Figura 2.2: Elementino della piastra

distribuite sul piano di mezzeria dell'elemento di piastra: in Figura 2.2 sono mostrate, per alleggerire la notazione, con un singolo vettore. Come si nota, nel passare dalla sezione individuata da x a quella individuata da $x + dx$ l'intensità degli sforzi cambia a causa dell'incremento dx e lo stesso avviene per la y. Per l'elementino si hanno le seguenti equazioni di equilibrio:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p = 0; \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} - Q_x = 0; \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0. \tag{2.3}$$

dove abbiamo indicato con Q_x e Q_y la forze di taglio agenti sulle sezioni di normale x e y rispettivamente; con M_y il momento flettente attorno all'asse x della sezione perpendicolare all'asse y (analogamente per M_x); con M_{yx} il momento torcente attorno all'asse y della sezione perpendicolare all'asse y (analogamente per M_{xy}). Ricavando Q_x e Q_y dalla (2.2) e della (2.3) e sostituendo nella (2.1) si perviene alla seguente equazione:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2\,\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + p = 0. \tag{2.4}$$

Essendo interessati allo spostamento dei punti della piastra lungo l'asse z, riscriviamo l'equazione (2.4) in funzione dello spostamento verticale w. Il legame tra i momenti flettenti e gli spostamenti è dato dalle seguenti equazioni:

$$M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \tag{2.5}$$

$$M_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right), \tag{2.6}$$

$$M_{xy} = -D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \tag{2.7}$$

dove

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \tag{2.8}$$

è la rigidezza della piastra, h il suo spessore, E il modulo di elasticità e ν il modulo di Poisson. Sostituendo le equazioni (2.5), (2.6), e (2.7) nella (2.4) otteniamo

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D} \tag{2.9}$$

o, in forma compatta,

$$\Delta^2 w = \frac{p}{D}. \tag{2.10}$$

Come dedotto da Kirchoff, e prima ancora da Navier e Sophie Germain, lo spostamento verticale della piastra, descritto dalla funzione $w = w(x, y)$, soddisfa l'equazione biarmonica.

2.3 Formulazione variazionale del problema

Con le ipotesi assunte, lo stato di tensione nella piastra è piano. La densità di energia che vi è immagazzinata è:

$$U_0 = \frac{1}{2}(\sigma_{xx}\epsilon_{xx} + \sigma_{yy}\epsilon_{yy} + \sigma_{xy}\epsilon_{xy}) \tag{2.11}$$

avendo indicato con σ_{ij} le tensioni sulla sezione di normale i dirette lungo l'asse j, con ϵ_{ij} le deformazioni lungo j delle fibre giacenti sull'asse i [18]. Conoscendo il legame esistente tra le tensioni, le deformazioni e lo spostamento verticale w:

$$\epsilon_{xx} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \epsilon_{yy} = -z\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad \epsilon_{xy} = -2z\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y};$$

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_{xx} + \nu\epsilon_{yy}); \quad \sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2}(\nu\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}); \quad \sigma_{xy} = \frac{E}{2(1-\nu^2)}\epsilon_{xy};$$

possiamo riscrivere la (2.11) in funzione dello spostamento lungo l'asse z:

$$U_0[w(x,y)] = \frac{Ez^2}{2(1-\nu^2)}\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2 + 2\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2\right] \tag{2.12}$$

Integrando sul volume otteniamo:

$$U = \iiint_V U_0 \, dV = \iint_A dz \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} U_0 \, dA, \tag{2.13}$$

avendo indicato con A l'area dell'elementino e con h il suo spessore. Sostituendo la (14) nella (15) e svolgendo i calcoli, si ha

$$U[w(x,y)] = \frac{Eh^3}{2(1-\nu^2)12}\iint_A \left[(w_{xx})^2 + (w_{yy})^2 + 2\nu w_{xx}w_{yy} + 2(1-\nu)(w_{xy})^2\right] dxdy \tag{2.14}$$

e, riaggiustando i termini

$$U[w(x,y)] = \frac{D}{2}\iint_A \left[(w_{xx} + w_{yy})^2 - 2(1-\nu)(w_{xx}w_{yy} - (w_{xy})^2)\right] dxdy. \tag{2.15}$$

Supponiamo ora di voler deformare lentamente la piastra spostandola di una distanza $\epsilon v(x,y)$. Otteniamo una nuova superficie individuata da $w(x,y) + \epsilon v(x,y)$. La variazione di energia associata a tale deformazione è data da:

$$\left.\frac{dU[w+\epsilon v]}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = \left.\frac{d}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} \frac{D}{2}\iint_A \left[\left(\frac{\partial^2(w+\epsilon v)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(w+\epsilon v)}{\partial y^2}\right)^2 + \right.$$

$$\left. -2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2(w+\epsilon v)}{\partial x^2}\frac{\partial^2(w+\epsilon v)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2(w+\epsilon v)}{\partial x \partial y}\right)^2\right)\right] dxdy \tag{2.16}$$

Svolgendo le derivate e mandando ϵ a zero otteniamo, $\forall$ v ammissibile, :

$$\delta U = \left.\frac{dU[w+\epsilon v]}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = \frac{D}{2}\iint_A \left[(w_{xx} + w_{yy})(v_{xx} + v_{yy}) + \right.$$

$$\left. -(1-\nu)(w_{xx}v_{yy} + w_{yy}v_{xx} - 2w_{xy}v_{xy})\right] dxdy = \iint_A pv \, dxdy \tag{2.17}$$

La (2.17) è nota come la *forma debole* o *variazionale* dell'equazione (2.10).

2.4 Dalla forma debole alla forma forte

Deriviamo la forma forte del problema della piastra vibrante. Iniziamo riscrivendo il primo membro della (2.17):

$$\delta U = \frac{D}{2}\iint_A \Big[(w_{xx}+w_{yy})(v_{xx}+v_{yy})-(1-\nu)(w_{xx}v_{yy}+w_{yy}v_{xx}-2w_{xy}v_{xy})\Big]\, dxdy =$$

$$= \frac{D}{2}\iint_A \Big[w_{xx}v_{xx} + w_{yy}v_{yy} + \nu(w_{yy}v_{xx} + w_{xx}v_{yy}) + 2(1-\nu)w_{xy}v_{xy}\Big]\, dxdy \tag{2.18}$$

Assumendo che la funzione w sia sufficientemente differenziabile e ∂A sia sufficientemente liscio, possiamo integrare ogni termine per parti così da rimuovere le derivate su v. Ricaviamo le formule di integrazione usando il Teorema della Divergenza

$$\iint_A \nabla \cdot \mathbf{F}\ dxdy = \int_{\partial A} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, ds$$

dove $\mathbf{F}$ è un campo vettoriale e $\mathbf{n}$ è il versore normale esterno. Se sostituiamo una volta $\mathbf{F} = (fg, 0)$ e una volta $\mathbf{F} = (0, fg)$, con f e g funzioni scalari, otteniamo, rispettivamente,

$$\iint_A fg_x\ dxdy = \int_{\partial A} fgn_x\, ds - \iint_A f_x g\ dxdy \tag{2.19}$$

$$\iint_A fg_y\ dxdy = \int_{\partial A} fgn_y\, ds - \iint_A f_y g\ dxdy \tag{2.20}$$

Possiamo ora integrare due volte per parti ogni termine della (2.18):

$$\iint_A w_{xx}v_{xx}\ dxdy = \int_{\partial A} w_{xx}v_x n_x\, ds - \iint_A w_{xxx}v_x\ dxdy =$$

$$\int_{\partial A} w_{xx}v_x n_x\, ds - \int_{\partial A} w_{xxx}v\ n_x\, ds + \iint_A w_{xxxx}v\ dxdy \tag{2.21}$$

Allo stesso modo si ottengono

$$\iint_A w_{yy}v_{yy}\ dxdy = \int_{\partial A} w_{yy}v_y n_y\, ds - \int_{\partial A} w_{yyy}v\ n_y\, ds + \iint_A w_{yyyy}v\ dxdy \tag{2.22}$$

$$\iint_A w_{yy}v_{xx}\ dxdy = \int_{\partial A} w_{yy}v_x n_x\, ds - \int_{\partial A} w_{xyy}v\ n_x\, ds + \iint_A w_{xxyy}v\ dxdy \tag{2.23}$$

$$\iint_A w_{xx}v_{yy}\ dxdy = \int_{\partial A} w_{xx}v_y n_y\, ds - \int_{\partial A} w_{xxy}v\ n_y\, ds + \iint_A w_{xxyy}v\ dxdy \tag{2.24}$$

$$\iint_A w_{xy}v_{xy}\ dxdy = \int_{\partial A} w_{xy}v_x n_y\, ds - \int_{\partial A} w_{xyy}v\ n_x\, ds + \iint_A w_{xxyy}v\ dxdy \tag{2.25}$$

Nel caso di una piastra rettangolare $A = (-L, L) \times (-H, H)$ si ha

$$\int_{\partial A} w_{xy}v_x n_y\, ds = 0$$

lungo i lati identificati dalle coordinate $x = \pm L$ poichè qui $n_y = 0$. Inoltre, n_y è costante sui lati rimanenti. Integrando per parti si ha:

$$\int_{\partial A} w_{xy}v_x n_y\, ds = \int_{-L}^{L} w_{xy}(x,H)v_x(x,H)\, dx - \int_{-L}^{L} w_{xy}(x,-H)v_x(x,-H)\, dx =$$

$$= w_{xy}(x,H)v(x,H)\Big|_{-L}^{L} - \int_{-L}^{L} w_{xxy}(x,H)v(x,H)\, dx - w_{xy}(x,-H)v(x,-H)\Big|_{-L}^{L} +$$

$$+ \int_{-L}^{L} w_{xxy}(x,-H)v(x,-H)\, dx\ = -\int_{\partial A} w_{xxy}v\ n_y\, ds - w_{xy}(-L,H)v(-L,H) +$$

$$-w_{xy}(L,-H)v(L,-H) + w_{xy}(-L,-H)v(-L,-H) \tag{2.26}$$

Sostituendo le (2.21)-(2.26) nel secondo membro della (2.18) otteniamo:

$$\delta U = \iint_A \Big[w_{xxxx}v + w_{yyyy}v + \nu w_{xxyy}v + \nu w_{xxyy}v + 2(1-\nu)w_{xxyy}v \Big] dxdy +$$

$$+ \int_{\partial A} (w_{xx} + \nu w_{yy})v_x n_x\, ds - \int_{\partial A} \Big[w_{xxx} + \nu w_{xyy} + 2(1-\nu)w_{xyy} \Big] v\ n_x\, ds + \int_{\partial A} (w_{yy} + \nu w_{xx})v_y n_y\, ds +$$

$$- \int_{\partial A} \Big[w_{yyy} + \nu w_{xxy} + 2(1-\nu)w_{xxy} \Big] v\ n_y\, ds + 2(1-\nu)\Big[w_{xy}(L,H)v(L,H) - w_{xy}(-L,H)v(-L,H) +$$

$$-w_{xy}(L,-H)v(L,-H) + w_{xy}(-L,-H)v(-L,-H) \tag{2.27}$$

Valutiamo a questo punto le condizioni al contorno.
Per una piastra $A = (-L, L) \times (-H, H)$ con i bordi liberi le condizioni al contorno, determinate da Poisson, sono:

$$\begin{cases} M_x = 0 \\ Q_x = 0 \qquad\qquad x = \pm L, \quad y \in (-H, H) \\ M_{xy} = 0 \end{cases} \tag{2.28}$$

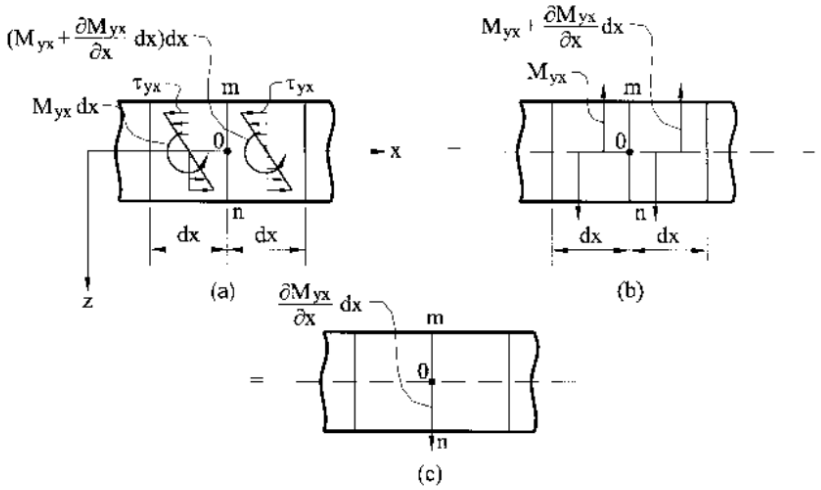


Figura 2.3: Elementini adiacenti sulla stessa sezione (y=H) dell'elemento di piastra di Figura 2.2.

$$\begin{cases} M_y = 0 \\ Q_y = 0 \\ M_{yx} = 0 \end{cases} \qquad y = \pm H, \quad x \in (-L, L) \tag{2.29}$$

Consideriamo due elementini adiacenti su una stessa sezione dell'elemento di piastra in Figura 2.2, ad esempio sulla sezione $y = H$. Come si vede (Figura 2.3), l'elementino di sinistra è soggetto al momento torcente $M_{yx}dx$ mentre quello di destra è soggetto a $(M_{yx} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x}dx)dx$. Tali momenti risultano dagli sforzi di taglio tangenziali τ_{yx} deretti lungo l'asse x. Possiamo sostituire tali sollecitazioni con delle coppie di forze verticali che generano lo stesso momento. Tale sostituzione è ammissibile per l'ipotesi di Kirchhoff nr. 7, equivalente a considerare rigido l'elementino sulla sezione. Le forze M_{yx} e $M_{yx} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x}dx$ sono uguali e opposte lungo la linea mn di Figura 2.3 e così, dall'equilibrio, ciò che vi rimane è la forza $\frac{\partial M_{yx}}{\partial x}dx$. Partendo da tali considerazioni Kirchhoff ridusse le condizioni al contorno da 6 a 4:

$$\begin{cases} M_x = 0 \\ V_x = 0 \end{cases} \qquad x = \pm L, \quad y \in (-H, H) \tag{2.30}$$

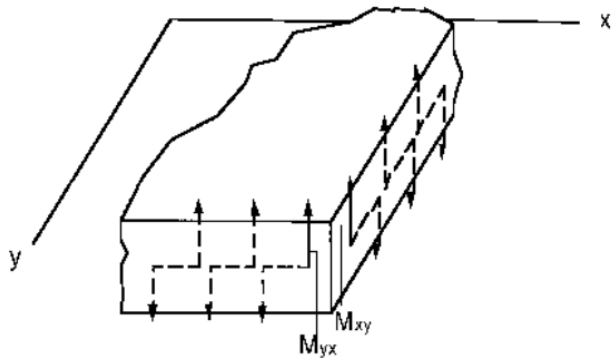


Figura 2.4: Momenti torcenti lungo le sezioni laterali dell'elementino di Figura 2.2.

$$\begin{cases} M_y = 0 \\ \\ V_y = 0 \end{cases} \qquad y = \pm H, \quad x \in (-L, L) \tag{2.31}$$

dove $V_i = Q_i + \frac{\partial M_{ij}}{\partial j}$ è la cosiddetta *forza di taglio effettiva* sulla sezione avente normale i.
Ricordando le relazioni (2.5), (2.6) e (2.7), e le espressioni di Q_x e Q_y ricavabili da (2.2) e (2.3), si ha che $V_x = -D(w_{xxx} + (2-\nu)w_{xyy})$ e $V_y = -D(w_{yyy} + (2-\nu)w_{yxx})$. I sistemi (2.28) e (2.29) diventano allora:

$$\begin{cases} w_{xx} + \nu w_{yy} = 0 \\ \\ w_{xxx} + (2-\nu)w_{xyy} = 0 \end{cases} \qquad x = \pm L, \quad y \in (-H, H) \tag{2.32}$$

$$\begin{cases} w_{yy} + \nu w_{xx} = 0 \\ \\ w_{yyy} + (2-\nu)w_{yxx} = 0 \end{cases} \qquad y = \pm H, \quad x \in (-L, L) \tag{2.33}$$

a cui occorre aggiungere:

$$w_{xy} = 0 \qquad \text{in} \quad (x, y) = (\pm L, \pm H) \tag{2.34}$$

Infatti, agli spigoli $(x, y) = (\pm L, \pm H)$ i momenti torcenti M_{xy} e M_{yx} risultano uguali e con lo stesso verso (Figura 2.4), quindi si sommano producendo una risultante $S = 2M_{xy} = -2D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$. Considerando la

piastra con i lati liberi, si deve avere che tale S è zero e quindi si ricava la condizione (2.34).
Sostituendo le condizioni (2.32) − (2.34) in (2.27) otteniamo:

$$\iint_A (w_{xxxx} + 2w_{xxyy} + w_{yyyy})v \; dxdy. \tag{2.35}$$

2.5 Un problema agli autovalori

Se la piastra non è soggetta a un carico esterno $p(x, y)$ e inizia a vibrare a causa di un impulso esterno, l'equazione che descrive il moto diventa (dall'equazione di Newton):

$$D\Delta^2 w = -\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{2.36}$$

avendo indicato con ρ la densità della piastra. Cerchiamo una soluzione della (2.36) per separazione di variabili:

$$w(x, y, t) = u(x, y)T(t)$$

Queste soluzioni sono chiamate *onde stazionarie* poichè nel tempo cambia solo la loro ampiezza e non la loro forma. Sostituendo nella (2.36) e considerando la massa per unità di area (ρh) unitaria insieme a D per alleggerire la notazione, otteniamo

$$\Delta^2 u \; T(t) = -u(x, y)T''(t) \tag{2.37}$$

Assumendo $T(t) \neq 0$ e $u(x, y) \neq 0$ possiamo riscrivere la (2.37) come

$$\frac{\Delta^2 u(x, y)}{u(x, y)} = -\frac{T''(t)}{T(t)} = \lambda. \tag{2.38}$$

Si noti come λ debba essere un valore costante poichè il primo membro della (2.38) è indipendente da t mentre il secondo membro è indipendente da (x, y). $T(t)$ deve soddisfare l'equazione differenziale ordinaria

$$T''(t) + \lambda T(t) = 0.$$

Poichè l'energia del sistema deve essere limitata, dobbiamo avere che $T(t)$ sia limitata nel tempo. Per tale motivo λ deve essere non negativo cosicchè, ponendo $\lambda = \omega^2$, otteniamo

$$T(t) = Acos(\omega t) + Bsin(\omega t).$$

Per quanto concerne la $u(x, y)$, dalla (2.38) si ottiene

$$\Delta^2 u(x, y) = \lambda u(x, y)$$

oppure, moltiplicando per un'arbitraria funzione v e integrando

$$\iint_A \Delta^2 u \cdot v \; dxdy = \lambda \iint_A u \cdot v \; dxdy, \tag{2.39}$$

il cui primo membro è la (2.35). Quest'ultima è la *forma variazionale* di un problema agli autovalori.

2.6 Principio del min-max

Una caratterizzazione degli autovalori di Δ^2 è data dal principio del min-max. Assumiamo che gli autovalori siano indicizzati in ordine di grandezza crescente, i.e. $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \ldots$. Allora, il $k-esimo$ autovalore λ_k soddisfa

$$\lambda_k = \min_{dimU=k} \max_{\substack{w \in U \\ w \neq 0}} \frac{\langle w, \Delta^2 w \rangle}{\langle w, w \rangle}, \tag{2.40}$$

dove il prodotto interno $\langle . \, , . \rangle$ è definito come

$$\langle w, v \rangle := \iint_A wv \; dxdy$$

e U è il sottospazio k-dimensionale delle funzioni che hanno le derivate, fino al secondo ordine, a quadrato integrabile. La quantità che viene massimizzata nella (2.40) è chiamata *Coefficiente di Rayleigh*, e il minimo esterno è preso sul sottospazio k-dimensionale delle funzioni test. Si noti che non è necessario imporre le condizioni di bordo libero (2.32), (2.33), e (2.34) nello spazio U, poichè esse sono automaticamente soddisfatte dalla soluzione di un problema di min-max [11].
Per capire perchè la formulazione min-max (2.40) ha senso, supponiamo di scegliere U come lo spazio generato dalle prime k autofunzioni $w_1, \ldots, w_k$. Allora, il più grande coefficiente di Rayleigh è ottenuto scegliendo $w = w_k$ e si ha $R(w_k) = \lambda_k$. D'altra parte, assumiamo che $\tilde{U}$ sia un altro sottospazio k-dimensionale generato da $\{u_1, \ldots, u_k\}$. Esiste un vettore non banale $u = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_i \in \tilde{U}$ tale che $\langle u, w_j \rangle = 0$ per $j = 1, \ldots, k-1$, poichè il sistema lineare omogeneo $(k-1) \times k$

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \langle u_i, w_j \rangle = 0, \qquad j = 1, \ldots, k-1$$

ha una soluzione non banale $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_k)^T$. Se ora esprimiamo u in base $\{w_1, w_2, \ldots\}$, otteniamo

$$u = \sum_{i=k}^{\infty} \beta_i w_i$$

poichè i primi $k-1$ coefficenti sono zero a causa dell'ortogonalità. Si ha, quindi, che il coefficiente di Rayleigh $R(u) = \frac{\langle u, \Delta^2 u \rangle}{\langle u, u \rangle} \geq \lambda_k$ e da ciò segue che

$$\langle u, \Delta^2 u \rangle = \langle \sum_{j=k}^{\infty} \beta_j w_j, \Delta^2 (\sum_{i=k}^{\infty} \beta_i w_i) \rangle = \sum_{i=k}^{\infty} \beta_i^2 \lambda_i \geq \lambda_k \sum_{i=k}^{\infty} \beta_i^2 = \lambda_k \langle u, u \rangle.$$

Quindi, per ogni sottospazio k-dimensionale U, il massimo quoziente di Rayleigh è necessariamente maggiore o uguale a λ_k, e ciò prova il principio del min-max.
Scegliendo appropriatamente il sottospazio k-dimensionale U, è possibile ottenere una buona approssimazione degli autovalori e delle autofunzioni di Δ^2 [12].

Capitolo 3

Discretizzazione

3.1 L'idea di Ritz

Walter Ritz presentò nel suo articolo [17] quello che oggi è noto come il *metodo spettrale* per il calcolo dei modi di vibrazione di una piastra. La sua idea principale fu quella di non risolvere la forma forte del problema agli autovalori bensì, di provare ad approssimare gli autovalori utilizzando il principio del min-max (2.40) con un sottospazio finito-dimensionale di funzioni ben scelte, e ciò lo condusse a utilizzare un metodo numerico. Intenzionati a risolvere il problema con il principio del min-max, dobbiamo prima relazionare $\langle w, \Delta^2 w\rangle$ al funzionale dell'energia $U[w]$ definita in (2.15). Considerando $w = v$ nella (2.35), otteniamo

$$\iint_A w\Delta^2 w \; dxdy = \left.\frac{dU[(1+\epsilon)w]}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0}$$

cioè

$$\left.\frac{dU[(1+\epsilon)w]}{d\epsilon}\right|_{\epsilon=0} = D\iint_A \Big[(w_{xx}+w_{yy})^2-(1-\nu)(2w_{xx}w_{yy}-2w_{xy}^2)\Big]\; dxdy =$$

$$D\iint_A \Big[(w_{xx}+w_{yy})^2 - 2(1-\nu)(w_{xx}w_{yy}-w_{xy}^2)\Big]\; dxdy = 2U[w].$$

Quindi

$$\langle w, \Delta^2 w\rangle = 2U[w]. \tag{3.1}$$

L'intero problema min-max è difficile da risolvere poichè dovremmo considerare tutti i possibili sottospazi k-dimensionali di uno spazio di funzioni

infinito dimensionale. Per rendere tale problema più trattabile Ritz decise di risolvere un problema di min-max più piccolo in cui il minimo è preso solo su sottospazi k-dimensionali di uno spazio finito dimensionale di funzioni ben scelte U_s. Egli optò per combinazioni lineari di funzioni della forma

$$u_{mn}(x,y) = w_m(x)w_n(y),$$

dove le $w_m(x)$ sono le autofunzioni di una trave monodimensionale con estremi liberi, descritta da

$$\frac{d^4 w_m}{dx^4} = k_m^4 w_m, \qquad \text{con } \frac{d^2 w_m}{dx^2} = 0, \frac{d^3 w_m}{dx^3} = 0 \quad in \quad x = \{-1, 1\},$$

che sono note in forma chiusa [Appendice B-1]:

$$w_m(x) = \begin{cases} \frac{cosh(k_m)cos(k_m x)+cos(k_m)cosh(k_m x)}{\sqrt{cosh(k_m)^2+cos(k_m)^2}}, & tan(k_m) + tanh(k_m) = 0, \ m \text{ pari} \\ \\ \frac{sinh(k_m)sin(k_m x)+sin(k_m)sinh(k_m x)}{\sqrt{sinh(k_m)^2-sin(k_m)^2}}, & tan(k_m) - tanh(k_m) = 0, \ m \text{ dispari.} \end{cases} \tag{3.2}$$

Restringendo la nostra ricerca a funzioni di questo tipo, stiamo risolvendo un più piccolo problema di min-max:

$$\lambda_k = \min_{\substack{dimU=k \\ U \subset U_s}} \max_{\substack{w \in U \\ w \neq 0}} \frac{\langle w, \Delta^2 w \rangle}{\langle w, w \rangle} \tag{3.3}$$

dove U_s consiste di funzioni della forma

$$u_s(x,y) := \sum_{m=0}^{s} \sum_{n=0}^{s} a_{mn} w_m(x) w_n(y). \tag{3.4}$$

La (3.3) può essere riscritta come

$$\lambda_k = \min_{\substack{dimU=k \\ U \subset \mathbb{R}^N}} \max_{\substack{\mathbf{a} \in U \\ \mathbf{a} \neq 0}} \frac{\mathbf{a}^T \widetilde{K} \mathbf{a}}{\mathbf{a}^T \mathbf{a}} \tag{3.5}$$

dove $\mathbf{a} := [a_{00}, a_{01}, a_{02}, \ldots] \in \mathbb{R}^N, N = (s+1)^2$, e $\widetilde{K}$ è la matrice di dimensioni $N \times N$:

$$\widetilde{K} := \begin{bmatrix} k_{00}^{00} & k_{01}^{00} & k_{10}^{00} & \dots \\ k_{00}^{01} & k_{01}^{01} & k_{10}^{01} & \dots \\ k_{00}^{10} & k_{01}^{10} & k_{10}^{10} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

I coefficienti k_{pq}^{mn} sono ottenuti inserendo u_s nella forma quadratica $\langle u_s, \Delta^2 u_s \rangle = 2U[u_s]$, il cui primo membro può essere riscritto come:

$$D \iint_A \left[\left(\frac{\partial^2 u_s}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 u_s}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 u_s}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u_s}{\partial y^2} + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 u_s}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dxdy.$$

Valutiamo, ad esempio, il primo integrale:

$$\iint_A \left(\frac{\partial^2 u_s}{\partial x^2} \right)^2 dxdy = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \left(\frac{\partial^2 \sum_{m=0}^{s} \sum_{n=0}^{s} a_{mn} w_m(x) w_n(y)}{\partial x^2} \right)^2 =$$

$$= \sum_{m,n} \sum_{p,q} a_{mn} a_{pq} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \frac{\partial^2 w_m(x)}{\partial x^2} w_n(y) \frac{\partial^2 w_p(x)}{\partial x^2} w_q(y)$$

avendo sfruttato l'ortogonalità delle autofunzioni. Svolgendo calcoli simili per gli integrali restanti, otteniamo:

$$k_{pq}^{mn} := \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} \frac{\partial^2 w_m(x)}{\partial x^2} w_n(y) \frac{\partial^2 w_p(x)}{\partial x^2} w_q(y) + w_m(x) \frac{\partial^2 w_n(y)}{\partial y^2} w_p(x) \frac{\partial^2 w_q(y)}{\partial y^2} +$$

$$+ 2\mu \frac{\partial^2 w_m(x)}{\partial x^2} w_n(y) \frac{\partial^2 w_q(y)}{\partial y^2} w_p(x) + 2(1-\mu) \frac{\partial w_m(x)}{\partial x} \frac{\partial w_n(y)}{\partial y} \frac{\partial w_p(x)}{\partial x} \frac{\partial w_q(y)}{\partial y} \; dxdy.$$

La (3.5) è la caratterizzazione min-max del problema agli autovalori di matrice:

$$K\mathbf{a} = \hat{\lambda}\mathbf{a}, \tag{3.6}$$

dove $K := \frac{1}{2}(\tilde{K} + \tilde{K}^T)$ è una matrice simmetrica di dimensioni $N \times N$. Per ogni autovalore $\hat{\lambda}_l$ abbiamo un autovettore associato $\mathbf{a_l} = [a_{00}^l, a_{01}^l, \dots]$, e così l'autofunzione approssimata corrispondente è

$$u_s^l = \sum_{m=0}^{s} \sum_{n=0}^{s} a_{mn}^l w_m(x) w_n(y).$$

Poichè K è una piccola matrice densa e noi vogliamo calcolare tutti (o la maggior parte) dei suo autovalori, un metodo come l'algoritmo QR risulta essere appropriato.

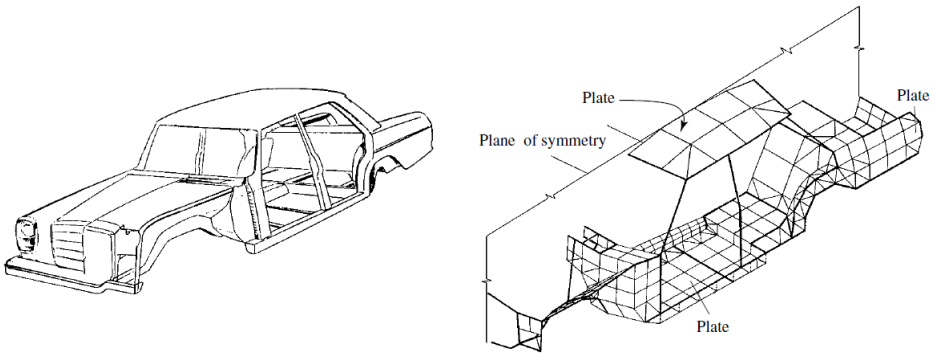


Figura 3.1: Esempio di applicazione del metodo delle differenze finite

3.2 Discretizzazione con le differenze finite

Un altro approccio alla soluzione del problema può essere quello di discretizzare la forma forte del problema agli autovalori usando le differenze finite. Per il Laplaciano utilizzeremo la discretizzazione standard a 5 punti. La discretizzazione delle condizioni di bordo libero (2.32)-(2.34), necessarie nella forma forte, è meno ovvia. Utilizzeremo il metodo dei volumi finiti.
Sia $\Omega = (-1, 1) \times (-1, 1)$ una piastra quadrata che discretizziamo con una griglia uniforme $(N + 1) \times (N + 1)$, includendo i nodi sul bordo. I punti della griglia (x_i, y_j), $0 \leq i, j, \leq N$, soddisfano

$$x_i = -1 + ih; \qquad y_j = -1 + jh; \qquad h = \frac{2}{N}.$$

Sia $w(x, y)$ la soluzione esatta del problema agli autovalori e sia $w_{ij} \approx w(x_i, y_j)$ la sua approssimazione con le differenze finite. Definiamo prima $u(x, y) = -\Delta w(x, y)$ e la sua discretizzazione

$$u_{ij} = \frac{4w_{i,j} - w_{i-1,j} - w_{i+1,j} - w_{i,j-1} - w_{i,j+1}}{h^2}. \tag{3.7}$$

Si noti che per definire $u_{i,j}$ è necessario conoscere anche i valori di w_{ij} che si trovano al di fuori di Ω, i.e., per $i, j \in \{-1, N + 1\}$. Questi punti sono chiamati nodi fantasma e non fanno parte del problema originario. Essi dovranno essere eliminati utilizzando le condizioni al contorno prima di risolvere il problema agli autovalori discreto. Una volta definito $u(x, y)$ la forma forte della PDE diventa

$$\Delta^2 w = \lambda w \Leftrightarrow -\Delta u = \lambda w.$$

Per utilizzare il metodo dei volumi finiti, dobbiamo integrare su un volume

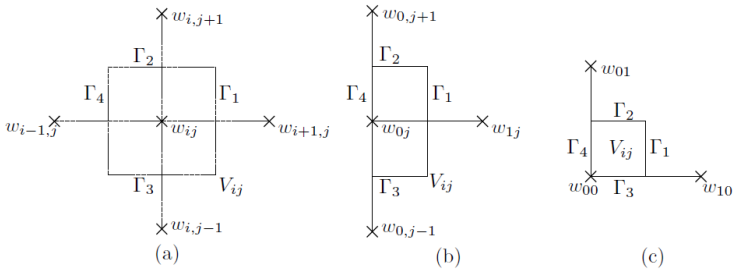


Figura 3.2: Volumi di controllo per differenti tipi di nodi: nodi interni (a), nodi sui bordi (b), nodi sui vertici (c).

di controllo V_{ij} attorno a ogni nodo della griglia. La Figura 3.2 mostra i volumi di controllo per i nodi interni, i nodi sui bordi e i nodi d'angolo. L'integrazione della forma forte della PDE su V_{ij} fornisce

$$-\iint_{V_{ij}} \Delta u \; dxdy = \lambda \iint_{V_{ij}} w(x,y) \; dxdy,$$

da cui, applicando il teorema della divergenza, otteniamo

$$-\int_{\partial V_{ij}} \frac{\partial u}{\partial n} ds = \lambda \iint_{V_{ij}} w(x,y) \; dxdy,$$

l'integrale a secondo membro è approssimato da (Figura 3.2)

$$\iint_{V_{ij}} w(x,y) \; dxdy \approx \mid V_{ij} \mid w_{ij} = \begin{cases} h^2 w_{ij} & \text{per i nodi interni,} \\ \frac{1}{2} h^2 w_{ij} & \text{per i nodi sui bordi,} \\ \frac{1}{4} h^2 w_{ij} & \text{per i nodi d'angolo.} \end{cases} \tag{3.8}$$

I flussi $\int \frac{\partial u}{\partial n} \; dx$ del membro di sinistra devono essere approssimati differentemente per i diversi tipi di nodo.

Nodi interni

Il flusso su ogni ∂V_{ij} è approssimato semplicemente con le differenze finite. Per esempio, lungo Γ_1 (Figura 3.2 (a)) abbiamo

$$\int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial n} \; ds \approx h \cdot \frac{u_{i+1,j} - u_{ij}}{h},$$

da cui

$$-\int_{\partial V_{ij}} \frac{\partial u}{\partial n} ds \; \approx 4u_{ij} - u_{i-1,j} - u_{i+1,j} - u_{i,j-1} - u_{i,j+1}. \tag{3.9}$$

Nodi di bordo

Consideriamo un volume di controllo lungo il lato sinistro $x = x_0 = -1$ (Figura 3.2 (b)); gli altri bordi si trattano similmente. I flussi lungo Γ_1, Γ_2 e Γ_3 sono sono approssimati allo stesso modo, eccetto che per la presenza di un fattore $\frac{1}{2}$ per i contributi superiore e inferiore, poichè la lunghezza di questi lati è $\frac{h}{2}$. Otteniamo, quindi

$$-\int_{\partial V_{0j}} \frac{\partial u}{\partial n} ds \approx 2u_{0j} - u_{1,j} - \frac{1}{2}u_{0,j-1} - \frac{1}{2}u_{0,j+1} - \int_{\Gamma_4} \frac{\partial u}{\partial n} ds. \tag{3.10}$$

Per approssimare l'integrale lungo Γ_4 dobbiamo utilizzare le condizioni al contorno. Abbiamo

$$\int_{\Gamma_4} \frac{\partial u}{\partial n} ds = \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \frac{\partial}{\partial n}(w_{xx}+w_{yy})dy = \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} [w_{xxx}+(2-\mu)w_{xyy}-(1-\mu)w_{xyy}]dy =$$

$$-(1-\mu)\int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} w_{xyy}\ dy = -(1-\mu)[w_{xy}(x_0, y_{j+1/2}) - w_{xy}(x_0, y_{j-1/2})].$$

La derivata mista w_{xy} può essere approssimata con le differenze finite:

$$w_{xy}(x_0, y_{j-1/2}) \approx \frac{w_{1,j} - w_{-1,j} - w_{1,j-1} + w_{-1,j-1}}{2h^2}. \tag{3.11}$$

Nodi angolari

Il volume di controllo corrispondente ai nodi angolari ha due lati all'interno di Ω e due lati lungo il bordo $\partial\Omega$. Detto ciò, per il nodo angolare (Figura 3.2 (c)), abbiamo

$$-\int_{\partial V_{ij}} \frac{\partial u}{\partial n} ds \approx u_{00} - \frac{1}{2}u_{1,0} - \frac{1}{2}u_{0,1} - \int_{\Gamma_3} \frac{\partial u}{\partial n} ds - \int_{\Gamma_4} \frac{\partial u}{\partial n} ds. \tag{3.12}$$

Per valutare gli integrali su Γ_3 e Γ_4, dobbiamo effetturare gli stessi calcoli del caso precedente ottenendo, per esempio,

$$\int_{\Gamma_4} \frac{\partial u}{\partial n} ds = -(1-\mu)\int_{y_0}^{y_{1/2}} w_{xyy}\ dy = -(1-\mu)[w_{xy}(x_0, y_{1/2}) - w_{xy}(x_0, y_0)].$$

Ma $w_{xy} = 0$ negli angoli. Essendo nullo il secondo termine del membro di destra otteniamo:

$$\int_{\partial V_{ij}} \frac{\partial u}{\partial n} ds \approx u_{00} - \frac{1}{2}u_{1,0} - \frac{1}{2}u_{0,1} + (1-\mu)w_{xy}(x_0, y_{1/2}) + (1-\mu)w_{xy}(x_{1/2}, y_0),$$

dove le derivate miste sono discretizzate come in (3.11).

Nodi fantasma

Come detto precedentemente, i valori di w_{ij} che cadono fuori dal dominio fisico Ω devono essere eliminati prima di risolvere il problema agli autovalori. Tale fine può essere raggiunto semplicemente utilizzando le condizioni al contorno sui bordi

$$w_{xx} + \mu w_{yy} = 0 \quad \text{per } x = \pm 1, \qquad w_{yy} + \mu w_{xx} = 0 \quad \text{per } y = \pm 1.$$

Così, per un nodo fantasma lungo il bordo sinistro $x = -1$, abbiamo

$$w_{-1,j} = 2(1+\mu)w_{0,j} - w_{1,j} - \mu w_{0,j-1} - \mu w_{0,j+1}. \tag{3.13}$$

Relazioni simili possono essere ricavate per tutti gli altri nodi fantasma lontani dagli angoli. Vicino a un angolo, ci sarà un accoppiamento tra due nodi fantasma adiacenti all'angolo, quindi,

$$\begin{aligned} w_{-1,0} + \mu w_{0,-1} &= 2(1+\mu)w_{0,0} - w_{1,0} - \mu w_{0,1}, \\ \mu w_{-1,0} + w_{0,-1} &= 2(1+\mu)w_{0,0} - \mu w_{1,0} - w_{0,1}. \end{aligned}$$

Poichè $\mu \neq 1$, possiamo risolvere il sistema 2×2 e ottenere le equazioni di $w_{-1,0}$ e $w_{0,-1}$ che dipendono soltanto da w_{00}, w_{01}, e w_{10}.

Implementazione in MATLAB

MATLAB possiede comandi in grado di generare una griglia su un quadrato e calcolare il Laplaciano a 5 punti con condizioni al contorno di Dirichlet:

```
G=numgrid('S', n+2);        % genera una griglia quadrata
                            % con n nodi per lato;

D=delsq(G);                 % Costruisce il Laplaciano a 5
                            % punti per G;
```

Potremmo tentare di costruire l'operatore bilaplaciano calcolando semplicemente $D \times D$, ma ciò genererebbe una discretizzazione errata vicino ai bordi. Il nostro scopo è costruire il problema agli autovalori discretizzato apportando piccole modifiche a D. In particolare, costruiremo i due operatori N e L, identici a D lontano dal bordo, tali che $\mathbf{u} = L\mathbf{w}$ e il prodotto $N\mathbf{u} = NL\mathbf{w}$ produca la matrice corretta ovunque.
Prima di tutto, dobbiamo identificare i nodi della griglia G che corrispondono ai nodi interni, sul bordo e ai nodi negli angoli. I seguenti comandi, portano alla classificazione mostrata in Figura 3.3:

```
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
0 . g g g g g g . 0
0 g b b b b b b g 0
0 g b x x x x b g 0
0 g b x x x x b g 0
0 g b x x x x b g 0
0 g b x x x x b g 0
0 g b b b b b b g 0
0 . g g g g g g . 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
```

Figura 3.3: Posizione dei nodi interni (x), dei nodi di bordo (b), dei nodi fantasma (g) per n=8.

```
%Definizione dei nodi di bordo e dei nodi fantasma

bl=G(3:n,3);      br=G(3:n,n);      bt=G(3,3:n)';      bb=G(n,3:n);

gl=G(3:n,2);      gr=G(3:n,n+1);    gt=G(2,3:n)';      gb=G(n+1,3:n);
```

Possiamo ora costruire le matrici N e L. Dalla (3.9), la parte di N corrispondente ai nodi interni coincide con la matrice standard del Laplaciano a 5 punti. Così, imponendo $N = D$, le righe corrispondenti ai bordi e ai nodi fantasma devono essere aggiustate.

Aggiustamento dei nodi di bordo

Se definiamo $u_{-i,j} := \int_{\Gamma_4} \frac{\partial u}{\partial n}\, ds$, allora la (3.10) diventa

$$-\int_{\partial V_{0j}} \frac{\partial u}{\partial n}\, ds \approx 2u_{0j} - u_{1,j} - \frac{1}{2}u_{0,j-1} - \frac{1}{2}u_{0,j+1} - u_{-1,j}. \tag{3.14}$$

Quindi, riferendosi allo stencil interno, i coefficienti corrispondenti alle variabili di bordo devono essere dimezzati, mentre quelli corrispondenti ai nodi interni e ai nodi fantasma restano uguali. Per il bordo di sinistra, questa correzione può essere fatta semplicemente utilizzando

$$N(bl, bl) = N(bl, bl)/2;$$

Sugli altri bordi si operano correzioni simili. Si noti che i nodi angolari subiranno due riadattamenti (uno per ogni lato), e ciò è esattamente quello che volevamo: la (3.12) può essere riscritta come

$$-\int_{\partial V_{ij}} \frac{\partial u}{\partial n} ds \;\approx u_{00} - \frac{1}{2}u_{1,0} - \frac{1}{2}u_{0,1} - u_{0,-1} - u_{-1,0}, \tag{3.15}$$

dove $u_{0,-1} := \int_{\Gamma_3} \frac{\partial u}{\partial n}\, ds$, $u_{-1,0} := \int_{\Gamma_4} \frac{\partial u}{\partial n}\, ds$. Quindi, dobbiamo dividere ognuno dei coefficienti di bordo per 2 e quelli diagonali per 4, che è equivalente ad aggiustare separatamente i termini su ogni bordo.

Definizione di u sui nodi fantasma

Per i nodi interni e di bordo, u è definita dalla (3.7). In linea di principio, u non è definita nei nodi fantasma; tuttavia, le (3.14) e le (3.15) suggeriscono che sarebbe conveniente definirle come flussi attraverso la frontiera del dominio fisico, che coinvolgono le derivate miste w_{xy} nei nodi di mezzo $(x_0, y_{j+1/2})$. In poche parole, dobbiamo sostituire le righe di L corrispondenti ai nodi fantasma. Si noti che il termine $w_{xy}(x_0, y_{j+1/2})$ compare sia in $u_{-1,j}$ sia in $u_{-1,j+1}$, e ciò significa che dobbiamo calcolarlo solo una volta. Il ciclo seguente calcola il modello corrispodente a $w_{xy}(x_0, y_{j+1/2})$ e aggiorna contemporaneamente le righe j e $j+1$.

```
for j=gl(1:end-1)',     % bordo sinistro
    L([j,j+1],[j,j+1,j+2*n,j+2*n+1)= . . .
    L([j,j+1],[j,j+1,j+2*n,j+2*n+1]). . .
    + (mu-1)/2*[1,-1,-1,1;-1,1,1,-1];
end
```

Eliminazione dei nodi fantasma

Se ora calcolassimo il prodotto $A = N \times L$, il modello sarebbe ovunque corretto. Tuttavia, questo sistema è troppo grande: il problema agli autovalori dovrebbe contenere solo nodi nel dominio fisico e non nodi fantasma. Perciò, dobbiamo eliminare i nodi fantasma utilizzando condizioni al contorno del tipo (3.13). Poichè le righe di A corrispondenti ai nodi fantasma sono comunque fittizie, possiamo sostituirle con equazioni del tipo (3.13):

```
A(gl,:)=0;     %nodi fantasma sinistri
for i=gl',
    A(i, [i+n,i,i+n-1,i+n+1,i+2*n])=. . .
    [2*(1+mu), -1, -mu, -mu, -1];
end;
```

Una volta imposte tutte le condizioni sul bordo, possiamo eliminare i nodi fantasma per ottenere un sistema che contiene solo nodi nel dominio fisico. Ciò è ottenuto prendendo il complemento di Schur corrispondente ai nodi fantasma:

```
phys = G(3:n,3:n); phys = phys(:);   % inseriamo tutti i nodi
ghost = [gl; gr; gt; gb];            % fisici in un vettore
A0 = A(phys, phys)-A(phys,ghost)/A(ghost,ghost)*A(ghost,phys);
```

Resta da risolvere il problema agli autovalori generalizzato

$$A_0 w = \lambda B w,$$

dove B è una matrice diagonale con h^2 per i nodi interni, $h^2/2$ per i nodi sui bordi e $h^2/4$ per i nodi agli angoli. Si noti che la matrice A_0 è si una matrice grande di dimensioni $(N+1)^2 \times (N+1)^2$ ma è sparsa e ogni riga contiene al più 13 termini diversi da zero. Inoltre, siamo interessati solo ai primi modi propri (più o meno minori di 50), poichè quelli più alti sono approssimazioni molto scarse delle autofunzioni continue. Per calcolare questi autovalori conviene quindi utilizzare un algoritmo tipo Lanczos, particolarmente efficiente per le matrici larghe e sparse, implementato in Matlab nel comando $eigs(\cdot)$.

Capitolo 4

Risultati numerici

4.1 Figure di Chladni

Non essendoci ancora i calcolatori, Ritz risolse l'intero problema a mano, effettuando continue approssimazioni. Per risolvere gli integrali, il fisico svizzero dovette approssimare le funzioni di base (3.2), che nella loro definizione contenevano la soluzione di un'equazione trascendente. Notando che poteva calcolare solo i primi valori di k_m, i quali si avvicinavano rapidamente a $m\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$ dal momento che $tanh(k_m)$ tende ad 1 molto rapidamente, esse furono approssimate con:

$$w_m = cos(\frac{m}{2} - \frac{1}{4})\pi x + \frac{(-1)^{\frac{m}{2}} cosh(\frac{m}{2} - \frac{1}{4})\pi x}{\sqrt{2} cosh(\frac{m}{2} - \frac{1}{4})\pi} \qquad m \text{ pari.}$$

Per m dispari ricavò un'espressione simile. Con successive approssimazioni, Ritz riuscì, alla fine, a trasformare il problema agli autovalori in Figura 4.1 in un problema numerico contenente sei coefficienti $A_0, A_1, \cdots, A_5$ da de-

$$\begin{cases} 0 = (a_{00}^{(00)} - \lambda_s) A_{00} + a_{01}^{(00)} A_{01} + a_{10}^{(00)} A_{10} + \ldots + a_{ss}^{(00)} A_{ss}, \\ 0 = a_{00}^{(01)} A_{00} + (a_{01}^{(01)} - \lambda_s) A_{01} + a_{10}^{(01)} A_{10} + \ldots + a_{ss}^{(01)} A_{ss}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ 0 = a_{00}^{(ss)} A_{00} + a_{01}^{(ss)} A_{01} + a_{10}^{(ss)} A_{10} + \ldots + (a_{ss}^{(ss)} - \lambda_s) A_{ss}. \end{cases}$$

Figura 4.1: Il sistema ottenuto inizialmente da Ritz

terminare. Il sistema da risolvere divenne, quindi, quello di Figura 4.2. Utilizzando il software Matlab (Appendice A-1) per risolvere lo stesso pro-

$u_m(y) = v_m$ gesetzt und

$$w = A_0 u_1 v_1 + A_1(u_1 v_3 + v_1 u_3) + A_2 u_3 v_3 + A_3(u_1 v_5 + u_5 v_1) + A_4(u_3 v_5 + u_5 v_3) + A_5 u_5 v_5.$$

Das System (53) wird hier

$$(54)\quad \begin{cases} 0 = (13{,}95 - \lambda) A_0 - 32{,}08 A_1 + 18{,}60 A_2 + 32{,}08 A_3 - 37{,}20 A_4 + 18{,}60 A_5, \\ 0 = -16{,}04 A_0 + (411{,}8 - \lambda) A_1 - 120{,}0 A_2 - 133{,}6 A_3 + 166{,}8 A_4 + 140 A_5, \\ 0 = +18{,}60 A_0 - 240{,}0 A_1 + (1686 - \lambda) A_2 - 218{,}0 A_3 - 1134 A_4 + 330 A_5, \\ 0 = +16{,}04 A_0 - 133{,}6 A_1 + 109{,}0 A_2 + (2945 - \lambda) A_3 - 424 A_4 + 179 A_5, \\ 0 = -18{,}6 A_0 + 166{,}8 A_1 - 567 A_2 - 424 A_3 + (6303 - \lambda) A_4 - 1437 A_5, \\ 0 = +18{,}6 A_0 + 280 A_1 - 330 A_2 + 358 A_3 - 2874 A_4 + (13674 - \lambda) A_5. \end{cases}$$

Figura 4.2: Il sistema numerico ottenuto da Ritz

blema di Ritz, abbiamo ottenuto la seguente matrice dei coefficienti:

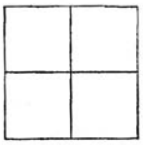
$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 13.95 & -32.22 & 18.60 & 32.22 & -37.20 & 18.60 \\ -16.11 & 406.12 & -119.93 & -133.55 & 172.08 & -83.55 \\ 18.60 & -239.85 & 1684.46 & 217.98 & -1136.62 & 329.54 \\ 16.11 & -133.55 & 108.99 & 2945.47 & -427.13 & 179.24 \\ -18.60 & 172.08 & -568.31 & -427.13 & 6325.44 & -1441.53 \\ 18.60 & -167.11, & 329.54, & 358.485 & -2883.06 & 13672.21 \end{pmatrix}$$

Confrontando tali valori con quelli ottenuti da Ritz, notiamo un'incredibile precisione nelle approssimazioni e nei calcoli svolti dallo scienziato svizzero. Possiamo anche notare due probabili errori di stampa: il segno del coefficiente A_3 nella terza equazione e il segno del coefficiente A_2 nell'ultima equazione. I coefficienti di A_5 nella seconda equazione e di A_1 nell'ultima potrebbero essere, invece, dei veri e propri errori: in questo caso, uno dovrebbe essere il doppio dell'altro ed entrambi presentano un ampio margine di errore. Avendo discretizzato il problema agli autovalori, Ritz doveva risolverlo determinando gli autovalori e gli autovettori che gli avrebbero permesso di costruire i modi di vibrazione della piastra. Di nuovo dimostrò di essere molto più avanti del suo tempo: invece di determinare le soluzioni del polinomio caratteristico egli inventò un metodo iterativo, un metodo che oggi è diventato standard sia per i problemi agli autovalori che per la soluzione dei sistemi lineari: fissata la prima componente dell'autovettore, cioè $A_0 = 1$, prese come approssimazione dell'autovalore la prima componente della diagonale della matrice "K". A questo punto, utilizzò le altre cinque equazioni per determinare le componenti rimantenti dell'autovettore. Ancora, risolvere un sistema di cinque equazioni era troppo gravoso e così Ritz penso di invertire la diagonale della matrice compiendo un passo di quello che oggi chiamiamo *metodo di Jacobi*. Avendo questa approssimazione per

I. *Grundton.* $\lambda = 12{,}43 - 18{,}0\,\delta\mu.$

$$w = \mathbf{u}_1\mathbf{v}_1 + 0{,}0394(u_1v_3 + v_1u_3) - 0{,}0040\,u_3v_3 - 0{,}0034(u_1v_5 + u_5v_1) + 0{,}0011(u_3v_5 + u_5v_3) - 0{,}0019\,u_5v_5.$$

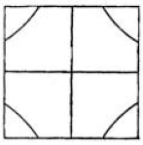
Fig. 1.



II. $\lambda = 378 - 57\,\delta\mu.$

$$w = -0{,}075\,u_1v_1 + (\mathbf{u}_1\mathbf{v}_3 + \mathbf{u}_3\mathbf{v}_1) + 0{,}173\,u_3v_3 + 0{,}045(u_1v_5 + u_5v_1) - 0{,}015(u_3v_5 + u_5v_3) - 0{,}029\,u_5v_5.$$

Fig. 2.



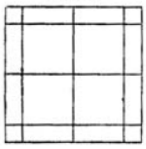
Es ist

y beob.:	0,530	0,578	0,630	0,690	0,752	0,819	0,893
x beob.:	$0{,}937_5$	0,8750	$0{,}812_5$	0,7500	$0{,}68_{75}$	0,6250	$0{,}562_5$
x ber. — x beob.:	—0,003	—0,002	0,000	—0,001	$-0{,}000_5$	0,000	0,000

III. $\lambda = 1554.$

$$w = 0{,}009\,u_1v_1 - 0{,}075(u_1v_3 + v_1u_3) + \mathbf{u}_3\mathbf{v}_3 - 0{,}057(u_1v_5 + u_5v_1) + 0{,}121(u_3v_5 + u_5v_3) - 0{,}007\,u_5v_5.$$

Fig. 3.



Messungen fehlen.

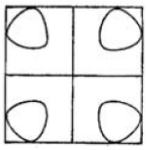
R. 20

IV. $\lambda = 2945.$

$$w = u_1v_5 + u_5v_1.$$

Diese Figur fehlt bei Chladni.

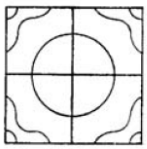
Fig. 4.



V. $\lambda = 6303.$

$$w = u_3v_5 + u_5v_3.$$

Fig. 5.



VI. $\lambda = 13674.$

$$w = u_5v_5.$$

Fig. 6.

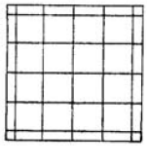


Figura 4.3: Confronto effettuato da Ritz tra i suoi risultati numerici e quelli ottenuti sperimentalmente.

l'autovettore, potè correggere l'autovalore utilizzando la prima equazione. Di seguito confrontiamo, rispettivamente, gli autovalori della matrice K ottenuti con l'approssimazione di Ritz con gli autovalori calcolati utilizzando il comando $eig(K)$ di Matlab:

12.47	12.49
379.85	379.34
1579.79	1559.28
2887.06	2899.93
5969.67	5961.32
14204.92	14235.30

Come si vede, sebbene Ritz abbia commesso qualche piccolo errore nel calcolo degli elementi, ciò ha avuto una piccola influenza sul risultato finale. Avendo ottenuto i risulati numerici il fisico potè confrontare i suoi risultati (Figura 4.3) con quelli ottenuti sperimentalmente da Chladni.

4.1.1 Confronto tra le figure di Chladni ottenute con il metodo spettrale di Ritz e quelle ottenute con il metodo delle differenze finite

Confrontiamo i due insiemi delle figure di Chladni ottenuti implementando il metodo spettrale di Ritz in Maple (Figura 4.4) (Appendice A.3) e le differenze finite in Matlab (Figura 4.5) (Appendice A.2). Possiamo notare le seguenti differenze:

1. Per modi semplici (autovalori con molteplicità 1, che corrispondono agli $m + n$ pari), le figure sono identiche tranne che per m e n grandi. Questo conferma che i due metodi risolvono realmente lo stesso problema agli autovalori poichè gli autovettori risultanti sono gli stessi.

2. Per i modi doppi (gli autovalori hanno molteplicità 2, cosa che accade quando m+n è dispari), i due insiemi di figure hanno forme simili ma potrebbero essere immagini speculari. Questo accade perchè la scelta di una base ortogonale per il corrispondente autospazio non è unica.

3. Per i modi più alti ($m, n \geq 5$), le figure generate dal metodo spettrale perdono dettagli e le linee nodali iniziano a intersecarsi quando dovrebbero essere curve e separate le une dalle altre. Questo succede perchè usiamo solo un piccolo numero di funzioni per la base spettrale ($0 \leq m, n \leq 6$). Incrementando il numero delle funzioni di base ritroviamo le stesse figure di Chladni del metodo alle differenze finite, che utilizza 100 nodi per direzione.

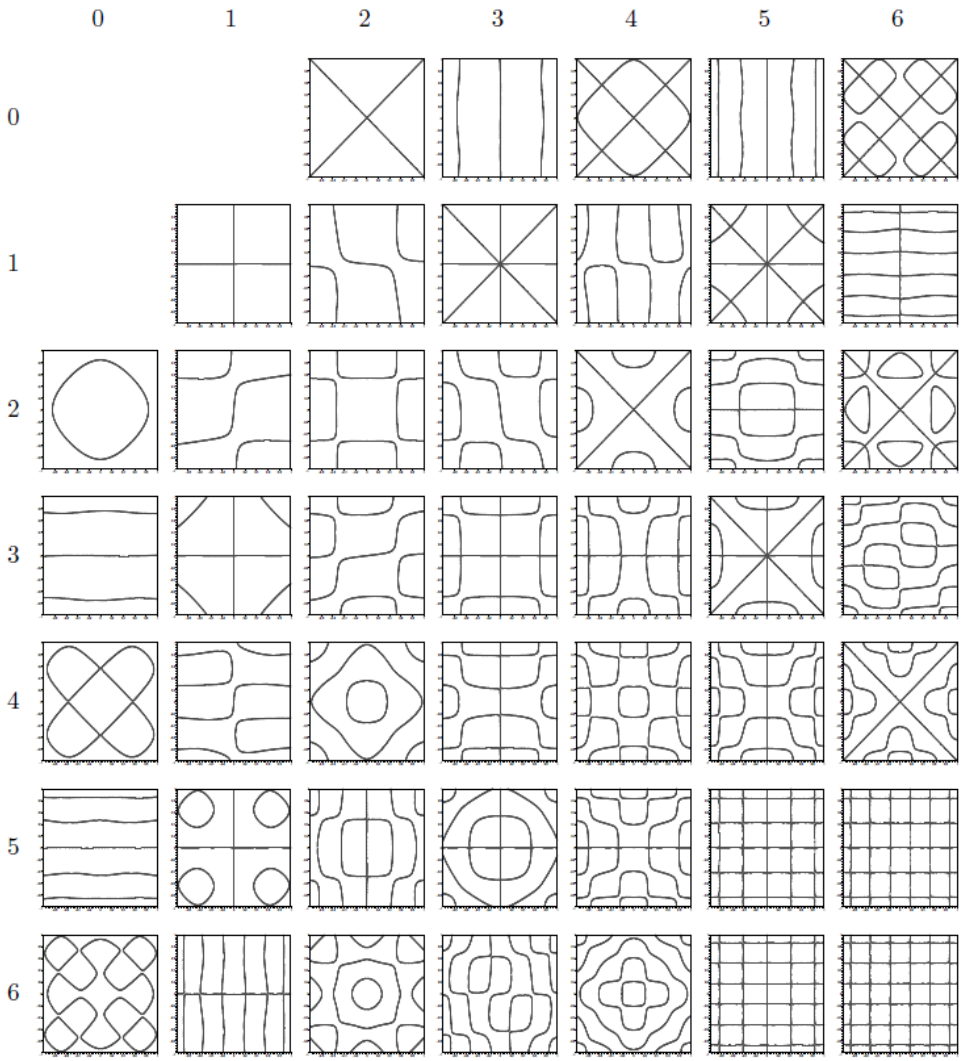


Figura 4.4: Le figure di Chladni ottenute con il metodo di Ritz.

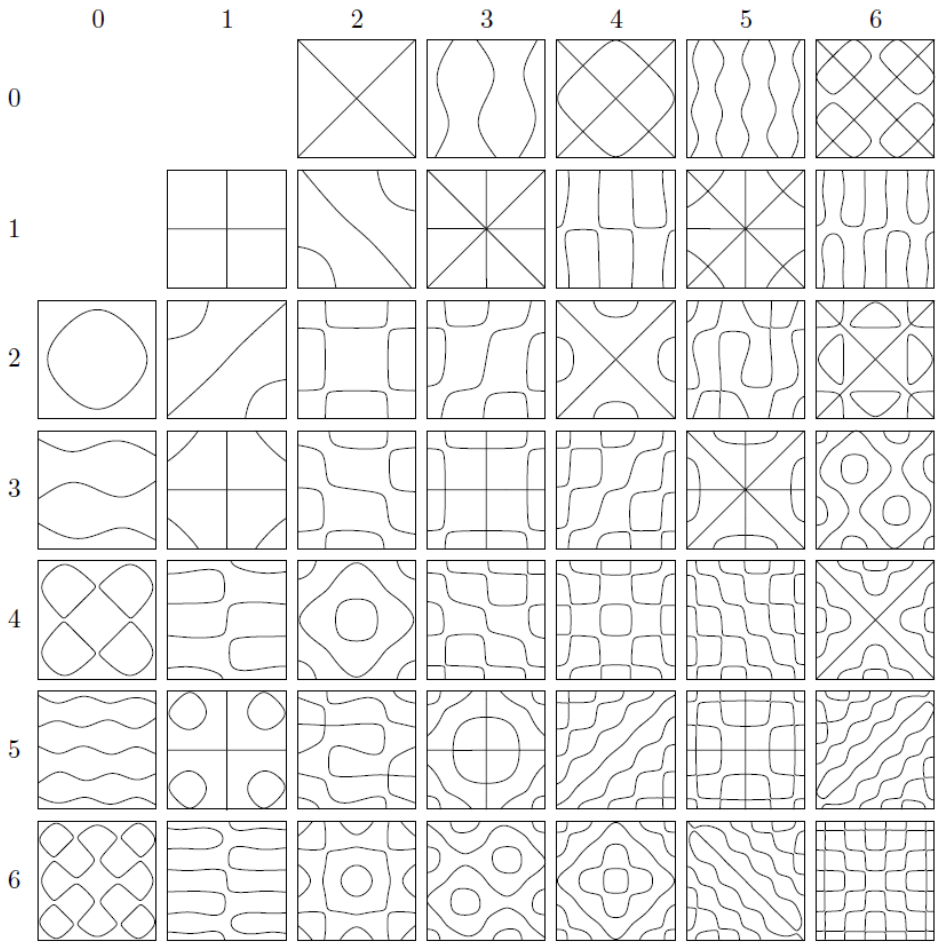


Figura 4.5: Le figure di Chladni ottenute con il metodo delle differenze finite, utilizzando una griglia composta da 100 nodi per direzione.

Per quanto riguarda gli autovalori, la tabella in Figura 4.6 mostra i primi 15 che sono stati calcolati con il metodo spettrale e con le differenze finite. Quando la differenza relativa è piccola (minore dell'1 per cento), possiamo confidare che l'autovalore reale si trova entro questo intervallo ed è ben approssimato dalla media dei due valori.

	Metodo Spettrale di Ritz				Metodo delle Differenze Finite			Gap
N	7	8	9	10	100	200	400	
(1,1)	12.5	12.5	12.5	12.5	12.4	12.5	12.5	0.08%
(0,2)	26.2	26.1	26.1	26.1	26.0	26.0	26.0	0.46%
(2,0)	35.8	35.8	35.8	35.8	35.6	35.6	35.6	0.36%
(2,1)*	81.3	81.2	81.2	81.2	80.8	80.9	80.9	0.36%
(3,0)*	236.7	236.4	236.4	236.3	234.9	235.3	235.4	0.39%
(2,2)	271.0	270.2	270.2	270.0	269.0	269.3	269.3	0.24%
(1,3)	322.5	322.5	322.4	322.4	320.1	320.5	320.7	0.53%
(3,1)	377.8	377.8	377.2	377.2	374.6	375.1	375.2	0.53%
(3,2)*	734.8	733.6	732.8	732.4	728.7	729.8	730.0	0.33%
(0,4)	881.2	880.3	880.3	879.8	873.3	875.5	876.1	0.42%
(4,0)	938.0	937.2	937.2	936.7	930.8	933.1	933.6	0.33%
(4,1)*	1111.4	1111.0	1109.9	1109.7	1099.8	1102.5	1103.2	0.59%
(3,3)	1538.0	1538.0	1532.0	1532.0	1522.3	1525.0	1525.7	0.42%
(2,4)	1707.2	1705.4	1705.4	1705.0	1695.4	1699.5	1700.5	0.26%
(4,2)	1837.3	1826.0	1826.0	1821.6	1807.7	1811.8	1812.8	0.49%

Figura 4.6: I primi 15 autovalori calcolati con il metodo spettrale (N è il numero delle funzioni di base) e con il metodo delle differenze finite (N è il numero di nodi della griglia in ogni direzione). Il simbolo "*" corrisponde agli autovalori doppi.

4.1.2 Confronto tra gli autovalori ottenuti da Chladni, quelli ottenuti da Ritz e quelli calcolati implementanto il metodo spettrale in Maple e le differenze finite in Matlab

Confrontiamo i nostri risultati con quelli ottenuti da Chladni e da Ritz. In Figura 4.7, l'altezza del marcatore rappresenta gli autovalori trovati da Chladni e Ritz mentre sull'asse delle ascisse troviamo quelli calcolati da noi. Si può osservare che Ritz tendeva a sovrastimare gli autovalori, mentre Chladni tendeva a sottostimarli. Il discostamento prodotto da Ritz può essere spiegato matematicamente: poichè Ritz ha sostituito un problema di minimizzazione in uno spazio di funzioni infinito dimensionale con un problema di minimizzazione su un sottospazio finito dimensionale, il minimo approssimato è maggiore del minimo reale. Per questo, il suoi valori sono necessariamente più grandi di quelli reali. Lo stesso motivo spiega anche perchè gli autovalori ottenuti con il metodo spettrale formano una sequenza

decrescente: incrementando il numero di funzioni della base, cerchiamo in sottospazi sempre più grandi, motivo per cui il minimo diventa sempre più piccolo. Per la sottostima di Chladni, ricordiamo che i suoi risultati provengono dall'osservazione di frequenze prodotte con un apparato sperimentale, quindi, possiamo sostenere che l'errore deriva dall'attrito nel vero sistema fisico, poichè l'attrito tende a ridurre la frequenza di vibrazione rispetto al sistema ideale.

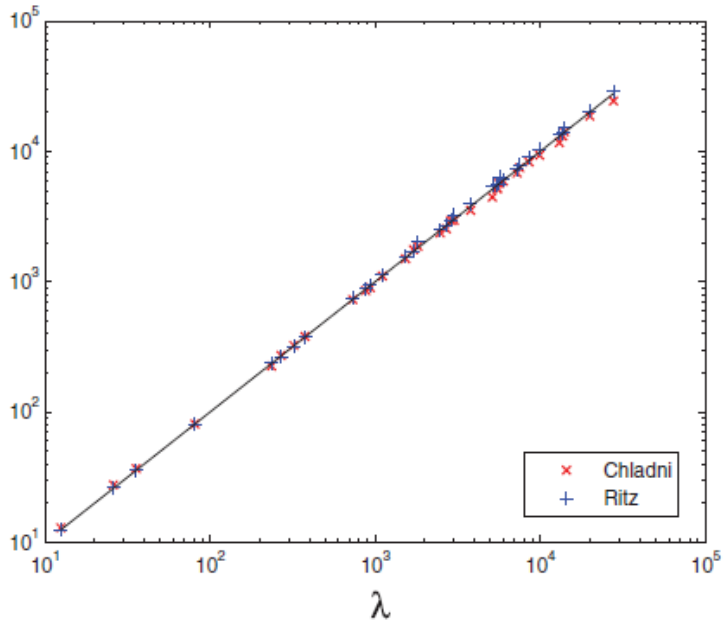


Figura 4.7: Confronto tra gli autovalori determinati da Chladni e quelli determinati da Ritz

Appendice A

A.1 - Script Matlab per il calcolo della matrice K

```
clear all; close all; clc

syms x y

mu=0.225

%Definisco il ciclo iterativo per il calcolo dei coefficienti K_mnpq

for m=1:2:5
    f1=(diff(symfun(spostamento(m),x),'x',2));
    f6=(symfun(spostamento(m),x));
    f9=(diff(symfun(spostamento(m),x),'x',2));
    f13=(diff(symfun(spostamento(m),x),'x'));
    for n=1:2:5
        f2=(symfun(spostamentoy(n),y));
        f5=(diff(symfun(spostamentoy(n),y),'y',2));
        f10=(symfun(spostamentoy(n),y));
        f14=(diff(symfun(spostamentoy(n),y),'y'));
        for p=1:2:5
            f3=(diff(symfun(spostamento(p),x),'x',2));
            f8=(symfun(spostamento(p),x));
            f12=(symfun(spostamento(p),x));
            f15=(diff(symfun(spostamento(p),x),'x'));
            for q=1:2:5
                f4=(symfun(spostamentoy(q),y));
                f7=(diff(symfun(spostamentoy(q),y),'y',2));
                f11=(diff(symfun(spostamentoy(q),y),'y',2));
                f16=(diff(symfun(spostamentoy(q),y),'y'));

                h1=symfun(f1(x)*f2(y)*f3(x)*f4(y), [x y]);
                h2=symfun(f5(y)*f6(x)*f7(y)*f8(x), [x y]);
                h3=symfun(f9(x)*f10(y)*f11(y)*f12(x), [x y]);
```

```
                h4=symfun(f13(x)*f14(y)*f15(x)*f16(y), [x y]);

                %risolvo l'integrale

                K{m,n,p,q}=vpa(int(int(h1(x,y),x,-1,1),y,-1,1))+...
                vpa(int(int(h2(x,y),x,-1,1),y,-1,1))+...
                +(2*mu)*vpa(int(int(h3(x,y),x,-1,1),y,-1,1))...
                +2*(1-mu)*vpa(int(int(h4(x,y),x,-1,1),y,-1,1));

            end
        end
    end
end

%estrapolo gli stessi elementi utilizzati da Ritz

Ke=[K{1,1,1,1} K{1,1,1,3}+K{1,1,3,1} K{1,1,3,3} K{1,1,1,5}+
K{1,1,5,1} K{1,1,3,5}+K{1,1,5,3} K{1,1,5,5}; ...
(K{1,3,1,1}+K{3,1,1,1})/2 (K{1,3,1,3}+K{1,3,3,1}+
K{3,1,3,1}+K{3,1,1,3})/2 (K{1,3,3,3}+K{3,1,3,3})/2...
(K{1,3,1,5}+K{1,3,5,1}+K{3,1,1,5}+K{3,1,5,1})/2 (K{1,3,3,5}+
K{1,3,5,3}+K{3,1,3,5}+K{3,1,5,3})/2 ...
(K{1,3,5,5}+K{3,1,5,5})/2;...
K{3,3,1,1} K{3,3,1,3}+K{3,3,3,1} K{3,3,3,3} K{3,3,1,5}
+K{3,3,5,1} K{3,3,3,5}+K{3,3,5,3} K{3,3,5,5};...
(K{1,5,1,1}+K{5,1,1,1})/2 (K{1,5,1,3}+K{1,5,3,1}+
K{5,1,3,1}+K{5,1,1,3})/2 (K{1,5,3,3}+K{5,1,3,3})/2...
(K{1,5,1,5}+K{1,5,5,1}+K{5,1,1,5}+K{5,1,5,1})/2
(K{1,5,3,5}+K{1,5,5,3}+K{5,1,3,5}+K{5,1,5,3})/2...
 (K{1,5,5,5}+K{5,1,5,5})/2;...
(K{5,3,1,1}+K{3,5,1,1})/2 (K{5,3,1,3}+K{5,3,3,1}+
K{3,5,3,1}+K{3,5,1,3})/2 (K{5,3,3,3}+K{3,5,3,3})/2...
(K{5,3,1,5}+K{5,3,5,1}+K{3,5,1,5}+K{3,5,5,1})/2
 (K{5,3,3,5}+K{5,3,5,3}+K{3,5,3,5}+K{3,5,5,3})/2...
 (K{5,3,5,5}+K{3,5,5,5})/2;...
K{5,5,1,1} K{5,5,1,3}+K{5,5,3,1} K{5,5,3,3} K{5,5,1,5}+
K{5,5,5,1} K{5,5,3,5}+K{5,5,5,3} K{5,5,5,5}];...

%calcolo i risultati con il metodo utilizzato da Ritz

V=zeros(6);
Lambda=zeros(6);
Kr=Ke(2:end,2:end); % ultime 5 equazioni
Kd=diag(Kr); % Jacobi
```

```
Ko=Kr-diag(diag(Kr)); % iterazione per autovalore
la=Ke(1,1) % primo autovalore e
a=zeros(1,size(Ke,2)); a(1)=1; % approssimazione dell'autovettore
for j=1:6 % iterazione di Ritz
b=-Ke(2:end,1);
bj=b-Ko*a(2:end)';
a(2:6)=bj./(Kd-la);% step di Jacobi
V(:,j)=a';
la=Ke(1,1)+Ke(1,2:end)*a(2:6)'; % nuova approssimazione dell'autovalore
Lambda(j,j)=la;
end

ev=sort(eig(Ke));

%calcolo autovettori e autovalori con matlab

[V,E]=eig(Ke);

for i=1:6
V1(:,i)=V(:,7-i);
end

%ordino gli autovalori e gli autovettori ottenuti

Lambda=sort(diag(E));
V=V1;
```

A.2 - Implementazione in Matlab delle differenze Finite

```
n = 100; % Numero di nodi per direzione (inclusi i nodi fantasma)
mu = 0.225; % Costante del materiale
h = 2/(n-3); % Distanza tra i nodi della griglia

figure

%for M=4:49         %ciclo da attivare se si vogliono
%subplot(7,7,M)     %tutti i modi di vibrazione

M = 20; % Numero degli autovalori richiesti
% Definisco la griglia e discretizzio il laplaciano
G = numgrid('S',n+2); D = delsq(G);
% Definisco i bordi e i nodi fantasma
bl = G(3:n,3); br = G(3:n,n); bt = G(3,3:n)'; bb = G(n,3:n)';
gl = G(3:n,2); gr = G(3:n,n+1); gt = G(2,3:n)'; gb = G(n+1,3:n)';
```

```
% Inizializzo le matrici N e L
L = D; N = D;
% Correggo i valori di N per le condizioni a contorno
N(bl,bl) = N(bl,bl)/2; N(br,br) = N(br,br)/2;
N(bt,bt) = N(bt,bt)/2; N(bb,bb) = N(bb,bb)/2;
% Modifico lo stencil in L nei nodi fantasma per approssimare
% ddu/dndt, che da le corrette condizioni al contorno
L([gl;gr;gt;gb],:) = 0;
for i=gl(1:end-1)', %sinistra
L([i,i+1],[i,i+1,i+2*n,i+2*n+1]) = ...
L([i,i+1],[i,i+1,i+2*n,i+2*n+1]) + (mu-1)/2*[1,-1,-1,1;-1,1,1,-1];
end;
for i=gr(1:end-1)', %destra
L([i,i+1],[i,i+1,i-2*n,i-2*n+1]) = ...
L([i,i+1],[i,i+1,i-2*n,i-2*n+1]) + (mu-1)/2*[1,-1,-1,1;-1,1,1,-1];
end;
for i=gt(1:end-1)', %sopra
L([i,i+n],[i+n,i,i+n+2,i+2]) = ...
L([i,i+n],[i+n,i,i+n+2,i+2]) - (mu-1)/2*[1,-1,-1,1;-1,1,1,-1];
end;
for i=gb(1:end-1)', %sotto
L([i,i+n],[i+n,i,i+n-2,i-2]) = ...
L([i,i+n],[i+n,i,i+n-2,i-2]) - (mu-1)/2*[1,-1,-1,1;-1,1,1,-1];
end;
% Compongo N ed L per ottenere l'operatore
A = N*L;
% Uso le condizioni al contorno per eliminare i nodi fantasma
A([gl; gr; gt; gb],:) = 0;
for i=gl', %sinistra
A(i,[i+n,i,i+n-1,i+n+1,i+2*n]) = [2*(1+mu), -1, -mu, -mu, -1];
end;
for i=gr', %destra
A(i,[i-n,i,i-n-1,i-n+1,i-2*n]) = [2*(1+mu), -1, -mu, -mu, -1];
end;
for i=gt', %sopra
A(i,[i+1,i,i+1+n,i+1-n,i+2]) = [2*(1+mu), -1, -mu, -mu, -1];
end;
for i=gb', %sotto
A(i,[i-1,i,i-1+n,i-1-n,i-2]) = [2*(1+mu), -1, -mu, -mu, -1];
end;
% elimino i nodi fantasma
phys = G(3:n,3:n); phys = phys(:); % put all physical nodes in a vector
ghost = [gl; gr; gt; gb];
A0 = A(phys,phys) - A(phys,ghost)/A(ghost,ghost)*A(ghost,phys);
```

```
% RHS: creo la matrice diagonale con le dimensioni dei volumi
B = speye(n^2);
B(bl,bl) = B(bl,bl)/2; B(br,br) = B(br,br)/2;
B(bt,bt) = B(bt,bt)/2; B(bb,bb) = B(bb,bb)/2;
B0 = B(phys,phys);
% Risolvo il problema agli autovalori generalizzato
[V,Lambda] = eigs(A0/h^4,B0,M,'SM');
[y,p] = sort(diag(Lambda));
x=[-1:2/(n-3):1];
Autovalori=sort(diag(Lambda));
for i=4:M, % grafico le figure di Chladni
contour(x,x,reshape(V(:,p(i)),n-2,n-2),[0 0],'k');
axis equal
end;
%end %termino il ciclo se ho attivato il "for"
     %per ottenere tutti i modi della piastra
```

A.3 - Implementazione in Maple del metodo spettrale

```
k:=m->if type(m,even) then
fsolve(tan(x)+tanh(x)=0,x=m*Pi/2-Pi/4)
else
fsolve(tan(x)-tanh(x)=0,x=(m-1/2)*Pi/2)
end if;
u:=(m,x)->if m=0 then
1/sqrt(2)
elif m=1 then
sqrt(3/2)*x
elif type(m,even) then
(cosh(k(m))*cos(k(m)*x)+cos(k(m))*cosh(k(m)*x))
/sqrt((cosh(k(m)))^2+(cos(k(m)))^2)
else
(sinh(k(m))*sin(k(m)*x)+sin(k(m))*sinh(k(m)*x))
/sqrt((sinh(k(m)))^2-(sin(k(m)))^2)
end if;
```

$$m \rightarrow \textbf{if } type(m, even) \textbf{ then } fsolve\left(\tan(x) + \tanh(x) = 0, x = \frac{1}{2} m \pi - \frac{1}{4} \pi\right) \textbf{ else}$$
$$fsolve\left(\tan(x) - \tanh(x) = 0, x = \frac{1}{2} \left(m - \frac{1}{2}\right) \pi\right)$$
$$\textbf{end if}$$

$$(m, x) \rightarrow \textbf{if } m = 0 \textbf{ then } \frac{1}{\sqrt{2}} \textbf{ elif } m = 1 \textbf{ then } \sqrt{\frac{3}{2}}\, x \textbf{ elif } type(m, even) \textbf{ then} \tag{1}$$
$$\frac{\cosh(k(m))\cos(k(m)\,x) + \cos(k(m))\cosh(k(m)\,x)}{\sqrt{\cosh(k(m))^2 + \cos(k(m))^2}}$$
$$\textbf{else } \frac{\sinh(k(m))\sin(k(m)\,x) + \sin(k(m))\sinh(k(m)\,x)}{\sqrt{\sinh(k(m))^2 - \sin(k(m))^2}} \textbf{ end if}$$

```
with(LinearAlgebra):
N:=6; # numero di modi in ogni direzione
mu:=0.225; # costante del materiale
Kt := Matrix(1..(N+1)^2,1..(N+1)^2);
i:=0;
for m from 0 to N do
for n from 0 to N do
i:=i+1; j:=0;
for p from 0 to N do
for q from 0 to N do
j:=j+1;
if type(m+p,even) and type(n+q,even) then #Do not calculate zeros
Kt[i,j]:=evalf(Int(Int(diff(u(m,x),x,x)*u(n,y)*diff(u(p,x),x,x)*u(q,y),
x=-1..1),y=-1..1)
+Int(Int(diff(u(n,y),y,y)*u(m,x)*diff(u(q,y),y,y)*u(p,x),
x=-1..1),y=-1..1)
+2*mu*Int(Int(diff(u(m,x),x,x)*u(n,y)*diff(u(q,y),y,y)*u(p,x),
x=-1..1),y=-1..1)
+2*(1-mu)*Int(Int(diff(u(m,x),x)*diff(u(n,y),y)*diff(u(p,x),x)*diff(u(q,y),y),
x=-1..1),y=-1..1));
fi;
od;
od;
od;
od
```

$$6$$

$$0.225$$

$$\begin{bmatrix} \textit{49 x 49 Matrix} \\ \textit{Data Type: anything} \\ \textit{Storage: rectangular} \\ \textit{Order: Fortran_order} \end{bmatrix}$$

$$0 \tag{2}$$

```
V,E:=Eigenvectors(Matrix((Kt+Transpose(Kt))/2,shape=symmetric));
for i from 1 to (N+1)^2 do
j:=0:
U[i]:=0:
for m from 0 to N do
for n from 0 to N do
j:=j+1:
U[i]:=U[i]+E[j,i]*u(m,x)*u(n,y):
od:
od:
od:
```

$$\begin{bmatrix} \textit{1 .. 49 Vector}_{\textit{column}} \\ \textit{Data Type: float}_8 \\ \textit{Storage: rectangular} \\ \textit{Order: Fortran_order} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \textit{49 x 49 Matrix} \\ \textit{Data Type: float}_8 \\ \textit{Storage: rectangular} \\ \textit{Order: Fortran_order} \end{bmatrix} \tag{3}$$

```
with(plots):
for i from 4 to (N+1)^2 do
contourplot(U[i],x=-1..1,y=-1..1,grid=[200,200],contours=[0],axes=boxed,
view=[-1..1,-1..1]);
od;
```

Appendice B

B.1 - L'equazione dell'asta monodimensionale

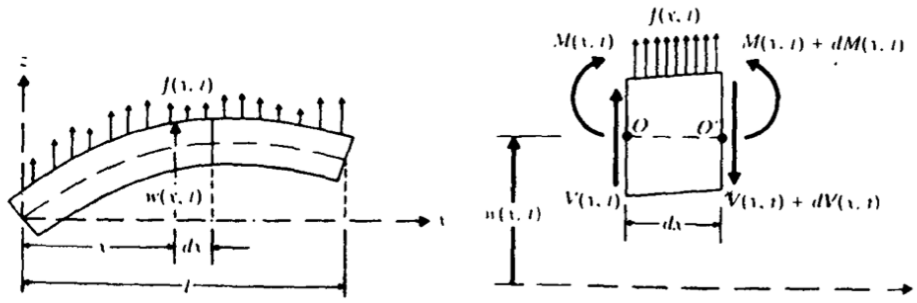


Figura 8: Elementino della trave

Consideriamo il diagramma di corpo libero di un elementino dell'asta mostrato in figura (8) dove $M(x,t)$ è il momento flettente, $V(x,t)$ la forza di taglio e $f(x,t)$ la forza per unità di lunghezza dell'asta. Poichè la forza di inerzia agente sull'elementino è

$$\rho A(x)dx\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x,t)$$

l'equilibrio delle forze lungo l'asse verticale z fornisce

$$-(V+dV)+f(x,t)dx+V=\rho A(x)dx\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x,t) \tag{1}$$

dove ρ è la densità e $A(x)$ è l'area della sezione di mezzeria dell'elementino. L'equazione di equilibrio dei momenti attorno all'asse y rispetto al polo 0 fornisce

$$(M+dM)-(V+dV)dx+f(x,t)dx\frac{dx}{2}-M=0. \tag{2}$$

Scrivendo

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx \qquad \text{e} \qquad dM = \frac{\partial M}{\partial x} dx$$

le equazioni precedenti diventano

$$\frac{\partial V}{\partial x}(x,t) + f(x,t) = \rho A(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x,t) \tag{3}$$

$$\frac{\partial M}{\partial x}(x,t) - V(x,t) = 0. \tag{4}$$

Ricavando $V(x,t)$ dalla (3) e sostituendo nella (4) otteniamo

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}(x,t) + f(x,t) = \rho A(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x,t) \tag{5}$$

Dalla teoria elementare delle travi inflesse (nota come teoria di Eulero-Bernoulli) sappiamo che la relazione tra momento flettente e deflessione può essere espressa da

$$M(x,t) = EI(x) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x,t) \tag{6}$$

dove E è il modulo di Young e $I(x)$ è il momento di inerzia della sezione della trave attorno all'asse y. Inserendo la (6) nella (5) otteniamo

$$EI(x) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(x,t) + \rho AEI(x) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x,t) = f(x,t). \tag{7}$$

Per vibrazioni libere ($f(x,y) = 0$) l'equazione del moto diventa
Per una trave uniforme l'equazione (5) si riduce a:

$$c^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(x,t) + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x,t) = 0 \tag{8}$$

con $c = \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$.
La soluzione di questa equazione può essere trovata per separazione di variabili come

$$w(x,t) = W(x)T(t).$$

Sostituendo l'ultima equazione nella (8), e svolgendo i calcoli, abbiamo

$$\frac{c^2}{W(x)}\frac{d^4W(x)}{dx^4} = -\frac{1}{T(t)}\frac{d^2T(t)}{dt^2} = a = \omega^2 \tag{9}$$

dove $a = \omega^2$ è una costante positiva. L'equazione (9) può essere riscritta come due equazioni

$$\frac{d^4W(x)}{dx^4} - \beta^4 W(x) = 0; \tag{10}$$

$$\frac{d^2T(t)}{dt^2} + \omega^2 T(t) = 0; \tag{11}$$

Determiniamo la soluzione della (10). Assumendo $W(x) = Ce^{sx}$, con C e s costanti, la (10) fornisce

$$s^4 - \beta^4 = 0 \tag{12}$$

le cui soluzioni sono

$$s_{1,2} = \pm\beta \qquad s_{3,4} = \pm i\beta.$$

Quindi, la soluzione della (10) è data da

$$W(x) = C_1e^{\beta x} + C_2e^{\beta x} + C_3e^{\beta x} + C_4e^{\beta x} \tag{13}$$

con C_1, C_2, C_3 e C_4 costanti da determinare con le condizioni al contorno. Si noti che la (13) può essere riscritta come

$$\begin{aligned} W(x) = C_1(cos(\beta(x)) + cosh(\beta x)) + C_2(cos(\beta(x)) - cosh(\beta x)) + \\ + C_3(sin(\beta(x)) + sinh(\beta x)) + C_4(sin(\beta(x)) - sinh(\beta x)). \end{aligned} \tag{14}$$

Nel caso di una trave con estremi liberi, le condizioni al contorno sono:

$$\text{Momento flettente} = EI\tfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0;$$

$$\text{Forza di taglio} = EI\tfrac{\partial}{\partial x}(\tfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}) = 0.$$

$$\begin{cases} Trovare\ u \in V \\ tale\ che \\ a(u,v) = \langle F, v\rangle \quad \forall v \in V, \end{cases}$$

con $a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\ d\mathbf{x}$ *e* $\langle F, v\rangle = \int_\Omega Fv d\mathbf{x}$.

Bibliografia

[1] A. V. Bitsadze, *Equation of Mathematical Physics*, Moscow, 1980.

[2] I. G. Bubnov, *Structural Mechanics of Shipbuilding*, 1914.

[3] I. G. Bubnov, *Report on the works of Professor Timoshenko which were awarded the Zhuranskyi Prize*, Symposium of the Institute of Communication Engineers, 81 (1913), All Union Special Planning Office (SPB).

[4] E. F. F. Chladni, *Die Akustik*, Breitkopf & Härtel, Leipzig, 1802.

[5] R. Courant, *Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations*, Bull. Amer. Math. Soc. 49 (1943), no. 1, 1-23.

[6] R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, 1937.

[7] F.B. Farquharson , *Aerodynamic stability of suspension bridges, with special reference to the Tacoma Narrows Bridge*, Parts I-V. Structural Research Laboratory, University of Washington, 1949-1954.

[8] B. G. Galerkin, *Rods and plates. Series occurring in various questions concerning the elastic equilibrium of rods and plates*, Engineers Bulletin (Vestnik Inzhenerov), 19 (1915), pp. 897-908

[9] M. J. Gander and G. Wanner, *From Euler, Ritz, and Galerkin to Modern Computing*, SIAM REVIEW, Vol. 54, No. 4, pp. 000?000, 2012.

[10] M. J. Gander and F. Kwok, *Chladni Figures and the Tacoma Bridge: Motivating PDE Eigenvalue Problems via Vibrating Plates*, SIAM REVIEW, Vol. 54, No. 3, pp. 573?596, 2012.

[11] C. Johnson, *Numerical Solutions of Partial Differential Equations by the Finite Element Method*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1987.

[12] S. G. Johnson, *The Min-Max/Variational Theorem and the Rayleigh Quotient*, Massachusetts Institute of Technology, 2011.

[13] G. Kirchhoff, *Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe*, J. Reine Angew. Math., 40 (1850), pp. 51-88.

[14] A. Quarteroni, *Modellistica Numerica per Problemi Differenziali*, Springer, 2012.

[15] S. S. Rao, *Mechanical Vibrations*, Purdue University, 2000.

[16] F. Ricciardelli, A. M. Marra, *Il crollo del ponte di Tacoma, settant'anni dopo*, 2010.

[17] W. Ritz, *Theorie der Transversalschwingungen einer quadratischen Platte mit freien Rändern*, Ann. Physik, 18 (1909), pp. 737-807.

[18] M. H. Sadd, *Elasticity. Theory, Applications, and Numerics*, Elsevier, 2005.

[19] S. Salsa, *Equazioni a derivate parziali. Metodi, modelli e applicazioni* , Second Edition. Springer, 2010.

[20] H. Slogoff and B. Berner, *A Simulation of the Tacoma Narrows Bridge Oscillations*, THE PHYSICS TEACHER Vol. 38, Oct. 2000.

[21] I. S. Sokolnikoff, *Mathematical Theory of Elasticity*, Second Edition. McGraw-Hill, New York, 1956.

[22] R. Szilard, *Theories and Applications of Plate Analysis: Classical, Numerical and Engineering Methods*, 2004.

[23] G. Teschl, *Mathematical Methods in Quantum Mechanics: With Applications to Schrodinger Operators*, American Mathematical Society Providence, 2014.

[24] S. Timoshenko and Woinowsky-Krieger, *Theory of plates and shells*, McGraw-Hill New York, 1959.

[25] E. Ventsel and T. Krauthammer, *Thin Plates and Shells Theory, Analysis, and Applications*, The Pennsylvania State University, University Park, Pennsylvania, 2001.